الفصل 1

الزوايا والخطوط المتوازية ومتوازيات الأضلاع

يجب على الدارسين إنشاء الأشكال ودراسة الإثباتات خطوة بخطوة. هذا عنصر أساسي في عملية التعلم لا يمكن تجنبه. قديمًا قالوا، "لا يوجد طريق ملكي للهندسة"، أي: "لا أحد يتعلم الرياضيات دون تعب".

## 1-1󠄀 الرموز والمنطق والتعريفات

يُشار إلى قضايا إقليدس- في الكتاب- بين حاصرتين [ ]؛ على سبيل المثال، تُكتب [3-32]، للإشارة إلى القضية الثانية والثلاثون في الفصل الثالث، بدلاً من كتابة "**القضية** 3-32". الموضوعات والتعريفات وما إلى ذلك، يُشار إليها أيضًا بطريقة مماثلة؛ على سبيل المثال، التعريف 12 في الفصل 1 يُكتب بالشكل التالي: [تعريف 1-12]. التمارين يُشار إليها بالطريقة التالية: [3-5، 1#] بدلاً من التمرين 1 للقضية 3-5.

سيُشار إلى المعادلات المرقمة بـ (10-2-2) بدلاً من المعادلة الثانية في الفصل 10، الجزء 2.

ملاحظة على **التمارين**: حل بعضها ولا تشعر بأن عليك حلها جميعًا. عمومًا، من المتوقع حل **التمارين** باستخدام القضايا واللازمات **والتمارين** التي سبقته. على سبيل المثال، يجب تجربة التمرين [1-32، 3#]، أولاً، باستخدام القضايا من [1-1] إلى [1-32] بالإضافة إلى جميع التمارين السابقة. إذا ثبت أن هذا صعب أو محبط للغاية، فعليك أن تفكر إذا كانت القضية [1-33] أو اللاحقات لها (وتمارينها) قد تساعد في حل التمرين. يجوز أيضًا استخدام حساب المثلثات أو الجبر الخطي أو أي تقنيات رياضية معاصرة أخرى في حل المسائل الصعبة.

### 1-1-1󠄀 الرموز التي ستحتاجها لقراءة الكتاب

ستُستخدم الرموز التالية للإشارة إلى الأشكال أو العلاقات الهندسية القياسية:

• الدوائر سيُشار إليه بالرمز:. علي سبيل المثال سنشير إلى الدائرة التي مركزها A بالرمز . إذا لم يكن المركز معلومًا، سيُشار إلى الدائرة بثلاث نقاط على محيطها، مثل .

• المثلثات سيُشار إليه بالرمز:

• متوازيات الأضلاع سيُشار إليه بالرمز:

• الخطان المتوازيان سيُشار إليهما بالرمز: //

• الخطان المتعامدان سيُشار إليهما بالرمز:

بالإضافة إلى ذلك، ستُستخدم الرموز المعتادة في الجبر: ،، ، ،،،،، بجانب بعض الرموز الإضافية:

• **التركيب** Composition: على سبيل المثال، افترض أن لدينا القطعتين و اللتين يتقاطعان عند النقطة . 󠄀 العبارة تُشير إلى مجموع طوليهما، ولكن تشير إلى تركيبهما ككائن. انظر الشكل 1-1-1.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-1-1: التركيب: الكائن الهندسي يتكون من القطعتين، و.

فيما يخص الزوايا، يمكن الإشارة إلى تركيبها باستخدام إما الرمز أو . في هذا الكتاب، سيُستخدم الرمز .

• التشابه: ∼ يتشابه شكلان أو كائنان إذا كان لهما نفس الشكل. ولكن ليس، بالضرورة، نفس الحجم. إذا تشابه كائنان وكان لهما نفس الحجم، فإنهما يتطابقان أيضًا.

• التطابق: يتطابق شكلان أو كائنان إذا كان لهما نفس الشكل والحجم، أو إذا كان لأحدهما نفس الشكل والحجم للصورة المعكوسة للآخر. هذا يعني أنه يمكن وضع أحدهما على الآخر (يسمح بعكس وقلب الشكل) بحيث ينطبقان، دون تغيير حجمهما.

### 1-1-2󠄀 المنطق الذي ستحتاجه لقراءة الكتاب

القضايا Propositions هي عبارات رياضية إما أن تكون صحيحة تمامًا أو خاطئة تمامًا، ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة معًا. بعض الأمثلة والأمثلة المضادة:

• "المثلث له ضلعان" قضية خاطئة.

• "المثلث له ثلاثة أضلاع" قضية صحيحة.

• "المثلث له ثلاثة أضلاع؟ " ليست قضية، إنها سؤال.

• "ارسم مثلث!" ليست قضية؛ إنها أمر.

يمكن تقسيم القضايا الصحيحة إلى موضوعات ومبرهنات. لا تحتاج الموضوعة إلى إثبات، وتتطلب المبرهنة إثباتًا، على الأقل؛ كل من الموضوعات والمبرهنات تُعتبر صحيحة. القضية التي لا يمكن إثبات صحتها ليست موضوعة ولا مبرهنة وتعد خاطئة. (حرق صغير: كل القضايا الواردة في هذا الكتاب صحيحة)

**الموضوعة** axiom هي قضية يُفترض أنها صحيحة دون إثبات. تُعد أساسيةً لدرجة أنه لا يمكن استنتاجها من أي قضية أكثر بدائيةً. قد تكون عبارة "أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث" أمرًا بديهيًا؛ ومع ذلك، فهي ليست موضوعة حيث يمكن اثباتها باستخدام القضايا الأخرى. العبارة "الكائنان المساويان لكائن ثالث متساويان مع بعضهما البعض " عبارة بديهية ولا يمكن استنتاجها من أي قضية أكثر بديهيةً، لذا، فهي تعد موضوعة.

**المبرهنة** theorem هي قضية يمكن إثباتها من قضايا معروفة (إما مبرهنات أو موضوعات). يمكن أيضًا وصف المبرهنات بأنها عبارات رمزية للخصائص الرياضية أو المنطقية.

**الإثبات** proof هو حجة رياضية صارمة توضح، بما لا لبس فيها، حقيقة قضية معينة. يتكون الإثبات من ثلاثة أجزاء: الفرضية، التي نفترضها، والادعاء، هو ما ينوي المؤلف إثباته، والجزء الأكبر من الإثبات هو الذي يوضح أن الادعاء صحيح بمجرد افتراض صحة الفرضية.

اللازمة Corollary هي استدلال أو استنتاج مبني على أساس مبرهنة، تنص عادةً على نتيجة صغيرة، لكنها مهمة، تُستنتج مباشرةً من الإثبات نفسه أو من نتيجة المبرهنة. على سبيل المثال، إذا كانت المبرهنة تنص على أن الجذور التربيعية للأعداد الأولية غير نسبية، إذًا إحدى اللازمات لهذه المبرهنة هي أن 󠄀 غير نسبى.

**التوطئة** lemmaهي مبرهنة تُستخدم كنقطة انطلاق لنتيجة أكبر وليست عبارة مهمة في حد ذاتها. بالرغم من أن جميع التوطئات- من الناحية الفنية- مبرهنات، لا تُسمى التوطئات مبرهنات؛ من أجل إيصال الفكرة القائلة بأنها ذات أهمية ضئيلة وموجودة للمساعدة في إثبات شيء أعمق.

#### 1-1-2-1 أمثلة

**قضية**. (1) إذا كان عددًا نسبيًا، فإن له مفكوك عشري.

الفرضية " عدد نسبي"، والادعاء " له مفكوك عشري" (أي يمكن كتابته في صورة عدد عشري). لإثبات أن هذه **القضية** مبرهنة، نبدأ بافتراض أن عدد نسبي. بعدها، يجب أن نظهر باستخدام المنطق أن له مفكوك عشري. إذا تمكننا من ذلك، فقد أثبتنا ادعاءنا، وحولنا هذه **القضية** إلى مبرهنة.

العبارات المقلوبة converse statements: إذا أعدنا كتابة **القضية** أعلاه بتبديل الفرضية والادعاء، فإننا نحصل على عبارتها المقلوبة:

**قضية**. (2) إذا كان لـ مفكوك عشري، فإن عدد نسبي.

لأن هذه **القضية** خاطئة، ليس لها إثبات وبالتالي ليست مبرهنة.

**ليس هناك ما يضمن أن مقلوب قضية معينة صحيحًا.**

من القضيتين (1) و (2)، من الممكن الحصول على قضيتين أخريين هما مكافئتاهما العكسيتين. المكافئة العكسية للقضية (1) هي قضية (3):

**قضية** (3) إذا لم يكن لـ مفكوك عشري، فإن ليس عددًا نسبيًا.

**المكافئة العكسية للقضية (2):**

**قضية** (4) إذا لم يكن عددًا نسبيًا، فإن ليس له مفكوك عشري.

على عكس القضايا المقلوبة، يكون المكافئ العكسي صحيحًا فقط، إذا كانت **القضية،** الأصلية، صحيحة. بما أن (1) صحيحة، إذًا (3) صحيحة؛ بما أن (3) صحيحة، إذًا (1) صحيحة. وبالمثل، فإن المكافئ العكسي **لقضية** يكون خاطئًا، فقط، إذًا كانت **القضية** الأصلية خاطئة: بما أن (2) خاطئة، إذًا (4) خاطئة؛ بما أن (4) خاطئة، إذًا (2) خاطئة.

### 1-1-3󠄀 التعريفات

نحتاج إلى لغة مشتركة لمناقشة الخبرات أو الأفكار المتشابهة. فيما يخص الرياضيات، هذا صحيح جدًا. عمل عالم الرياضيات عديم الفائدة، إذا كانت التعريفات التي يستخدمها غامضة.

قد يرغب الطلاب الذين يقرؤون هذا الجزء أول مرة في قراءة التعريفات 1 إلى 6 و9 إلى 11 ثم الانتقال إلى [1-**4]**، والعودة إلى التعريفات المتبقية بالإضافة إلى [1-2] و [1-3] حسب الحاجة.

#### النقطة

1- **النقطة** هي كائن صفري الأبعاد. المجسم هو الكائن الهندسي الذي له ثلاثة أبعاد (الطول والارتفاع والعرض). السطح هو الكائن الهندسي ذو بعدين، والخط أو القطعة من الخط هي الكائن الهندسي الذي له بعد فقط. لأن النقطة لا تحتوي على أي من هذه، فإن أبعادها صفر.

#### الخط

2- **الخط** هو كائن ذو بعد واحد: له طول فقط، على سبيل المثال. إذا كان له ارتفاع أو عرض، مهما كان صغيراً، فسيكون له بعدان. لذا، فإن الخط ليس له ارتفاع أو عرض.

الخط الذي يحتوي على النقطتين و يكتب .

(يتوافق هذا التعريف مع تعريف إقليدس الأصلي حيث لا يلزم أن يكون الخط مستقيمًا. ومع ذلك، في جميع نصوص الهندسة الحديثة، من المفهوم أن "الخط" يكون دون أي إنحناء؛ أي مستقيم. راجع أيضًا [تعريف 1-4].)

3- الخطوط تتقاطع في نقاط. ومع ذلك، قد توجد نقطة دون أن تكون تقاطعًا لخطين.

4- يسمى الخط دون أي انحناء بالخط المستقيم. في هذا الكتاب تشير كلمة الخط حصريًا إلى الخط المستقيم. لن يُشار إلى الخط المنحني (مثل محيط الدائرة) بـ "خط" لتجنب الالتباس. الخطوط ليس لها نهاية؛ لأنها لانهائية الطول.

**قطعة الخط** (أو ببساطة القطعة) مشابهة للخط ما عدا أنها محدودة الطول ولها نهايتان (طرفيها). قطعة الخط ذات النهايتين و تكتب . (للتعبير عن طول أي قطعة، سنهمل الخط العلوي. على سبيل المثال، هو طول القطعة .)

**الشعاع** يشبه الخط بسبب طوله اللانهائي؛ إلا أن له نهاية واحدة. الشعاع الذي له النهاية والنقطة يكتب على الشكل (حيث A هي نهايته).󠄀

A picture containing rectangle

Description automatically generated

الشكل 1-1-2: [تعريف 1-2، 1-3، 1-4] خط، قطعة، و شعاع

#### المستوى

5- السطح له بعدين.

6- المستوى هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية ويُفترض أن يكون مستوي أو مسطحًا تمامًا. المستوى هو النظير ثنائي الأبعاد للنقطة (صفرية البعد) والخط (أحادي البعد) والفضاء ثلاثي الأبعاد. معظم الهندسة الإقليدية تكون في مستويات؛ أي أن "المستوى" يشير إلى الحيز الذي تُجرى فيها الهندسة ثنائية الأبعاد.

تُحدد المستويات بثلاث نقاط؛ لأي نقاط ثلاث ليست على نفس الخط، يوجد مستوى واحد فقط يحتوي على جميع النقاط الثلاثة.

7- **الشكل المستوي** هو أي مجموعة من النقاط، أو الخطوط أو القطع أو المنحنيات على مستوى. **المضلع** هو شكل مستوي مغلق يحده عدد محدود من القطع.

يوجد لجميع الأشكال المستوية المحدودة مقياس يسمى المساحة. **المساحة** هي الكمية التي تعبر عن اِتّسَاع شكل ثنائي الأبعاد في مستوى.

**المساحة** هي النظير ثنائي الأبعاد لطول خط أو منحنى (مفهوم أحادي البعد) أو حجم المجسم (مفهوم ثلاثي الأبعاد).

8- **النقاط المتسامتة** هي النقاط التي تقع على نفس الخط المستقيم أو الشعاع أو القطعة.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-1-3: [تعريف 1-11] لاحظ أنه يمكن الإشارة إلى الزاويتين بـ و ، أو الزاوية عند النقطة حيث رأس الزاوية.

#### الزاوية

9- **الزاوية المستقيمة** (أو ببساطة الزاوية) هي الزاوية المكونة من خطين مستقيمين أو قطعتين أو شعاعين ممتدين للخارج من نقطة مشتركة، ولكن في اتجاهين مختلفين.

10- **رأس الزاوية** هي نقطة التقاطع بين الخطين أو الشعاعين أو القطعتين المكونين للزاوية.

11- نشير إلى الزاوية بالرمز وثلاثة أحرف مثل ، حيث الحرف الأوسط يكون عند الرأس. ومن ثم، يمكن الإشارة إلى هذه الزاوية إما بـ أو . من حين لآخر، سنشير للزاوية عند بكتابة "الزاوية عند النقطة " بدلاً من تسمية الزاوية على النحو الوارد أعلاه.

12- الزاوية المكونة بتركيب زاويتين أو أكثر تسمى بمجموعهم. ولذلك في الشكل 1-1-4، نجد أن  
 حيث تُوضع على القطعة . نكتب للتعبير عن هذا المفهوم.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-1-4: [تعريف 1-12]

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-1-5: [تعريف 1-13]

13- افترض أن القطعتين و مركبتان بحيث حيث قطعة (انظر الشكل 1-1-5). إذا كانت النقطة التي لا تقع على القطعة متصلة بالنقطة A، فإن الزاويتين و **مكملتان** لبعضهما البعض. يظل هذا التعريف صحيحًا إذا استبدلت بالقطع خطوط مستقيمة أو أشعة، مع مراعاة ما يلزم من التبديل أو التعديل.

14- عندما تقف قطعة، ، على قطعة أخرى، ، بشرط أن تكون الزاويتان المتجاورتان على جانبي متساويتين (أي )، تسمى كل من الزاويتين **بالزاوية القائمة**، وتوصف القطعة التي تقف على الأخرى بأنها عمودية عليها. (انظر الشكل 1-1-5).

نكتب عمودية على أو ببساطة . ويترتب على ذلك أن الزاوية المكملة للزاوية القائمة قائمة أيضًا.

تُعرّف الخطوط العمودية على كائن متعدد الأضلاع بأنها **أعمدة الكائن**.

التعريف أعلاه ينطبق على الخطوط المستقيمة والأشعة، مع ما يلزم من التبديل أو التعديل.

عادةً ما يُشار إلى القطعة المستقيمة داخل مثلث والتي تمتد من الرأس إلى الضلع المقابل وتكون عمودية على هذا الضلع **بارتفاع المثلث**، مع أنّه يمكن الإشارة إليها بالمعنى العام باعتبارها **عمود المثلث**.

15- الزاوية الحادة هي زاوية أصغر من الزاوية القائمة. في الشكل 1-1-6 زاوية حادة.

16- الزاوية المنفرجة هي زاوية أكبر من الزاوية القائمة. إن في الشكل 1-1-6 زاوية منفرجة. مكملة الزاوية الحادة هي زاوية منفرجة، والعكس، مكلمة الزاوية المنفرجة هي زاوية حادة.

17- إذا كان مجموع زاويتين يساوي زاوية قائمة، فإن كل واحدة منهما تكون **متممة** الأخرى. انظر الشكل 1-1-6.

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-1-6: [تعريف 1-17] الزاوية زاوية قائمة. لأن ، ويترتب على ذلك أن الزاويتين و كل منهما متممة للأخرى.

#### الخطوط المتقاطعة

18- **الخطوط المتقاطعة** هي أي ثلاث خطوط مستقيمة أو أكثر تتقاطع في نفس النقطة. ينطبق هذا التعريف على الأشعة والقطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

19- **الرأس** هي النقطة المشتركة التي تمر عبرها الأشعة.

#### المثلث

20. **المثلث** هو مضلع يتكون من ثلاث قطع متصلة عند نقاط النهاية. تسمى هذه القطع الثلاثة **أضلاع المثلث**. يمكن الإشارة إلى ضلع، على وجه الخصوص، بقاعدة المثلث لأسباب توضيحية، ولكن لا يوجد فرق جوهري بين خصائص القاعدة وخصائص أي من الضلعين الآخرين. يُستثنى من ذلك المثلث المتساوي الساقين حيث يتساوى الضلعان (الساقان) في الطول.

صيغة مساحة المثلث هي

حيث = طول ضلع، و = طول القطعة العمودية من هذا الضلع إلى الرأس المقابل.

تكون مساحة المثلث صفرًا، فقط، إذا كانت رؤوسه متسامتة.

21- **المثلث المختلف الأضلاع** هو المثلث الذي لا تتساوى أضلاعه الثلاثة في الطول (المثلث الأيسر في الشكل 1-1-7). **المثلث المتساوي الساقين** هو المثلث ذو الضلعين المتساويين (المثلث الأوسط في الشكل 1-1-7). **المثلث متساوي الأضلاع** هو مثلث جميع أضلاعه متساوية (المثلث الأيمن في الشكل 1-1-7). **المثلث متساوي الزوايا** هو مثلث جميع زواياه متساوية.

Chart

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 1-1-7: [تعريف 1-21] الأنواع الثلاثة للمثلثات: مختلف الأضلاع، متساوي الساقين، متساوي الأضلاع.

22- **المثلث القائم** هو مثلث تكون إحدى زواياه قائمة، مثل المثلث الأوسط في الشكل 1-1-7. **وتر المثلث** هو الضلع المقابل للزاوية القائمة. (في المثلث الأوسط في الشكل 1-1-7، قائمة، لذا فإن هي وتر المثلث.)

Chart

Description automatically generated with low confidence

الشكل 1-1-8: [تعريف 1-23]

23- **المثلث المنفرج** هو مثلث إحدى زواياه منفرجة (مثل في ، الشكل 1-1-8).

24- **المثلث الحاد** هو مثلث كل زاوية من زواياه حادة، مثل المثلثين الأيسر والأيمن في الشكل 1-1-7.

25- **الزاوية الخارجية** لمثلث هي الناتجة من مد ضلع المثلث. في الشكل 1-1-8، يحتوي على الممتد التي تصنع الزاوية الخارجية .

كل مثلث له ست زوايا خارجية. أيضًا، كل زاوية خارجية مكملة للزاوية الداخلية المجاورة. في الشكل 1-1-8، الزاوية الخارجية تُكمل الزاوية الداخلية المجاورة .

#### المضلع

26- المضلع هو شكل مستقيم محدود بثلاث قطع مستقيمة أو أكثر (انظر التعريف 7). على سبيل المثال، الدائرة شكل مستوي، ولكنها ليست مضلعًا، لكن المثلثات في الشكل 1-1-8 أشكال مستوية ومضلعات.

27- يقال إن **المضلع محدب** إذا لم تكن له زاوية داخلية أكبر من .

28- **رباعي الأضلاع** هو المضلع المكون من أربعة أضلاع.

29- **شبيه المعين** **Lozenge** هو متوازي أضلاع متساوي الأضلاع وكل زاوية من زواياه الحادة تساوي 45 درجة. في بعض الأحيان، يُسقط شرط الـ 45 درجة، والمطلوب فقط أن يوجد فيه زاويتان متقابلتان حادتان والاثنتان الأخريان منفرجتان. يستخدم مصطلح **معين Rhombus** بشكل شائع لوصف متوازيات الأضلاع المتساوية الأضلاع. انظر الشكل 1-1-9.

Shape

Description automatically generated

الشكل 1-1-9: [تعريف 1-29] معينان.

30. **المربع** هو المعين الذي له زاوية قائمة.

31- يسمى المضلع الذي له خمسة أضلاع خماسي الاضلاع. والذي له ستة أضلاع، سداسي الأضلاع، إلخ.

#### الدائرة

32- **الدائرة** شكل مستوي يُنشأ عن طريق توصيل جميع النقاط متساوية البعد عن نقطة مركزية. النقطة المركزية هي **مركز** **الدائرة**، والنقاط المتصلة **محيط** **الدائرة**.

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 1-1-10: [تعريف 1-32] 󠄀 مركزها C ونصف قطرها. لاحظ أن . لاحظ أيضًا أن هو قطر الدائرة.

33- نصف قطر الدائرة هو أي قطعة مبنية من مركزها إلى محيطها، مثل أو أو في الشكل 1-1-10. لاحظ أن (أي أن جميع أنصاف الأقطار، لنفس الدائرة، متساوية).

34- **قطر الدائرة** هو القطعة المنشأة مرورًا بالمركز ونهايتيها على المحيط، مثل في الشكل 1-1-10.

#### غير ذلك

35- **محور تماثل** هو أي قطعة أو خط أو شعاع يقسم الشكل الهندسي المنتظم أو المتماثل إلى نصفين متساويين (مثل في المضلع ، الشكل 1-1-11).

Chart, polygon

Description automatically generated

الشكل 1-1-11: [تعريف 1-35]

تعريف بديل: إذا نُصف شكل بواسطة قطعة (أو خط أو شعاع) بشرط أن لكل نقطة على جانب من القطعة (أو الخط أو الشعاع) توجد نقطة تناظرها على الجانب الآخر من القطعة (أو الخط أو الشعاع) وبعدي النقطتين عن القطعة (أو الخط أو الشعاع) متساويين، فإن القطعة (أو الخط أو الشعاع) هي **محور التماثل** الشكل.

36- **متوسط المثلث** هو أي قطعة منشأة من أي زاوية لمثلث إلى نقطة منتصف الضلع المقابل. كل مثلث له ثلاث متوسطات متقاطعة. **مركز كتلة المثلث** هي نقطة تقاطع المتوسطات الثلاثة.

Polygon

Description automatically generated with low confidence

الشكل 1-1-12: [تعريف 1-36] متوسط . يحتوي المثلث على متوسطين آخرين غير ظاهرين في الصورة، وتقاطعهما مركز كتلة .

37- **المحل الهندسي**  locusهو مجموعة من النقاط التي يفي موقعها أو يتحدد بشرط أو أكثر. على سبيل المثال، الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة بعدها عن المركز يساوي نصف قطر الدائرة.

38- **المركز المحيطي** لمثلث هو النقطة التي تتقاطع فيها المنصفات العمودية الثلاثة للمثلث.

39- **المركز الداخلي** لمثلث هو نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية الثلاث للمثلث.

سيكون هناك مزيد من التعريفات في [1-5] والفصول اللاحقة.

40- **التراكب** هو وضع كائن هندسي على آخر، مثل خط على خط، أو مثلث على مثلث، أو دائرة على دائرة، وما إلى ذلك. التراكب المستخدم في الهندسة عقلي فقط. أي أننا نتصور أن أحد الأشياء يُوضع على الآخر. وبعد ذلك، إذا تمكنا من إثبات أن الكائنات تتطابق، فإننا نستنتج من الموضوعة الحالية أنهم متساوون من جميع النواحي. يتضمن التراكب المبدأ الذي يستخدمه إقليدس بشكل متكرر دون ذكره صراحة، الذي نصه: "يمكن نقل أي شكل من موضع إلى آخر دون تغيير الحجم أو الهيئة."

## 1-2󠄀 المسلمات

نفترض ما يلي:

1- يمكن إنشاء خط مستقيم أو شعاع أو قطعة من أي نقطة إلى أي نقطة أخرى. يمكن تقسيم الخطوط والأشعة والقطع بواسطة نقاط إلى قطع جزئية محدودة الطول.

2- يمكن أن تُمد أي قطعة، إلى أي قطعة أطول أو شعاع أو خط مستقيم.

3- يمكن إنشاء دائرة من أي نقطة وبأي طول محدود من المركز.

## 1-3󠄀 موضوعات

1-3-1󠄀 الموضوعات الجبرية

لنفترض أن ، إلخ، أعداد حقيقية. تتطلب هذه الموضوعات أربع عمليات: الجمع، والطرح والضرب والقسمة.

**الجمع** (غالبًا ما يُشار إليها برمز الجمع "") هو إحدى العمليات الحسابية الأساسية الأربع، العمليات الأخرى هي الطرح والضرب والقسمة. إن جمع عددين ممثلين لكميتين يعطينا المجموع أو الكمية الإجمالية للكميتين مجتمعتين. على سبيل المثال، إذا  و ، إذًا

جمع الكميات يُعرَّف عندما يكون للكميات المجموعة نفس الوحدات. على سبيل المثال، القطعة التي يبلغ طولها 3 وحدات ثم تُمد بمقدار 7 وحدات إضافية، يصبح طولها الإجمالي 10 وحدات؛ أو 3 + 7 = 10 حيث يمثل كل عدد عددَ الوحدات. ومع ذلك، إذا أضيفت قطعة بطول 3 وحدات إلى ، فإن المجموع غير مُعرّف.

**الطرح** هو عملية إزالة كميات من كميات. يُشار إليه بعلامة الطرح (). على سبيل المثال، إذا كان و ، إذًا

الطرح حالة خاصة من الجمع حيث

**الضرب** (غالبًا ما يُشار إليه بالرمز "" أو بنقطة "·" أو بعدم وجود رمز): عند التفكير في الضرب كجمع متكرر، فإن الضرب يعادل إضافة عدد من نسخ حد (المضروب) يساوي الحد الآخر (المضروب فيه). عادةً ما يكتب المضروب فيه أولاً والمضروب ثانيًا، هذا قد يختلف، وأحيانًا لا يكون التمييز، بينهما، ذا معنى. مثال على ذلك،

حيث حاصل الضرب يساوي مضافًا إلى نفسه مرات.

الضرب هو حالة خاصة من الجمع. يمكن حساب مساحة بعض الكائنات الهندسية المستوية (مثلثات، مستطيلات، متوازي الأضلاع، إلخ) عن طريق ضرب طولين (القاعدة والارتفاع، طولا ضلعين متجاورين، إلخ). يمكن أيضًا حساب حجم بعض الكائنات الهندسية المجسمة (كرات، مكعبات، إلخ) عن طريق ضرب ثلاثة أطوال.

**القسمة**: في الحساب في المرحلة الابتدائية، القسمة (يشار إليها بالرمز ÷ أو / أو حيث ). على وجه التحديد، إذا كانت في تساوي ، مكتوبًا:

حيث ليست صفرًا، إذا حاصل قسمة على يساوي ، ويكتب هكذا:

القسمة هي حالة خاصة من الضرب حيث

أيضا، يقسم إذا كان ، حيث عدد صحيح؛ أو، حيث عدد صحيح. لاحظ أنه إذا قسمت ، فإن،

1- قاسم

2- مضاعف

3- قابلة للقسمة على

نستخدم ما يلي كموضوعات جبرية:

1- خاصية الجمع: إذا كانت و ، فإن .

2- خاصية الطرح: إذا كانت و، إذًا.

3- خاصية الضرب: إذا كانت ، إذًا .

4- خاصية القسمة: إذا و ، إذًا .

5- خاصية الاستبدال (التعويض): إذا كانت ، فيمكن التعويض بأي من أو عن الآخر في أي معادلة أو متباينة.

6- خاصية الانعكاس: .

7- خاصية التماثل: إذا ، .

8- خصائص القَلْب للمتباينات:

(أ) إذا ، فإن.

(ب) إذا ، فإن .

9- خصائص التعدي للمتباينات:

(أ) إذا و فإن .

(ب) إذا و فإن .

(ج) إذا و فإن .

(د) إذا و فإن .

10- خصائص التباين في الجمع والطرح:

1. إذا ، فإن و .
2. إذا ، فإن و .

11- خصائص المتباينات في الضرب والقسمة:

1. إذا و فإن و .
2. إذا و فإن و .
3. إذا و فإن و .
4. إذا و فإن و .

12- خاصية المعكوس الجمعي للمتباينات:

1. إذا فإن .
2. إذا فإن .

13- خاصية المعكوس الضربي للمتباينات (حيث يكون و موجبين أو سالبين فقط):

1. إذا فإن .
2. إذا فإن .

14- خاصية المعكوس الضربي للمتباينات: حيث موجب و سالب.

1. إذا فإن .

### 1-3-2󠄀 مَوْضوعاتُ التطابق

في الهندسة، يتطابق شكلان أو كائنان إذا كان لهما نفس الشكل والحجم، أو إذا كان لأحدهما له نفس الشكل والحجم كالصورة المعكوسة للآخر. رمزيًا، يكون كائنين متطابقين إذا وفقط إذا كان يمكن تحويل أحدهما إلى الآخر باستخدام الانتقال أو التدوير أو الانعكاس فقط. هذا يعني أنه يمكن إعادة وضع أي كائن وعكسه (دون تغيير حجمه) لينطبق بدقة على الكائن الآخر. لذلك فإن شكلين مستويين مختلفين على قطعة من الورق متطابقان إذا تمكنا من قصهما ثم مطابقتهما تمامًا. يُسمح بقلب الورق.

بعض الأمثلة:

• القطعتان المستقيمتان متطابقتان إذا كان لهما نفس الطول.

• الزاويتان متطابقتان إذا كان لهما نفس القياس.

• الدائرتان متطابقتان إذا كان لهما نفس القطر أو نصف القطر.

إذا كانت و متطابقتين، فيمكننا كتابة . ثلاث خصائص للتطابق مع أمثلة:

1- الخاصية الانعكاسية: و .

2- خاصية التماثل: إذا ، فإن . وأيضًا، إذا فإن .

3- خاصية التعدي: إذا و فإن . أيضًا، إذا   
و ، فإن .

تمنحنا المسلمات الجبرية ومسلمات التطابق خاصية التوزيع:

### 1-3-3󠄀 الموضوعات الهندسية

1. الكائنات المتطابقة متساوية في القياس.

2- لا يمكن لخطين مستقيمين في مستوى إحاطة مساحة محدودة.

3- جميع الزوايا القائمة متساوية.

4- إذا تقاطع خطان (،) مع خط ثالث ( ) بحيث مجموع الزاويتين الداخليتين () على نفس الجانب من الخط أقل من مجموع زاويتين قائمتين، فسيلتقي الخطان على بعد محدود، على هذا الجانب. انظر الشكل 1-3-1.

A picture containing antenna

Description automatically generated

الشكل 1-3-1: يجب أن يتقاطع مع على بعد محدود.

ما سبق ينطبق على الأشعة والقطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

يمكن استبدال **موضوعة بلاي** فير بالموضوعة أعلاه، والتي تنص على ما يلي: "في أي مستوى، يمكن رسم خط على الأكثر موازيًا لخط أخر عبر نقطة ليست على هذا الخط." سميت هذه الموضوعة على اسم عالم الرياضيات الإسكتلندي جون بلاي فير. إن شرطه "على الأكثر" هو المهم؛ لأنه يمكن إثبات بواسطة قضايا إقليدس أن هناك خطًا موازيًا على الأقل. غالبًا ما تُكتب هذه الموضوعة بعبارة "هناك خط فريد ".

**"في أي مستوى، يمكن رسم خط فريد موازيًا لخط أخر عبر نقطة ليست على هذا الخط."**

تشمل الموضوعات المكافئة للموضوعة 4 ما يلي:

• مجموع زوايا أي مثلث 180 درجة (مسلمة المثلثات).

• يمكن إحاطة أي مثلث.

• يوجد شكل رباعي جميع زواياه قائمة (أي مستطيل).

• يوجد زوج من الخطوط المستقيمة على بعد ثابت عن بعضهما البعض.

• الخطان الموازيان لنفس الخط متوازيان.

• لا يوجد حد أقصى لمساحة المثلث. (موضوعة واليس)

## 1-4 الكتاب الأول، القضايا 1-26

### قضية 1-1. إنشاء مثلث متساوي الأضلاع.

على أي قطعة مستقيمة، من الممكن إنشاء مثلث متساوي الأضلاع.

لنفترض أن لدينا ؛ ندعي أنه يمكن إنشاء مثلث متساوي الأضلاع على .

**الإثبات:** أنشئ الدائرة ، التي مركزها ونصف قطرها [**مسلمة** 3 من الجزء 1-2]. أنشئ الدائرة ، التي مركزها ونصف قطرها ، التي تتقاطع مع عند النقطة C. أنشئ القطعتين ، [مسلمة 1 من الجزء 1-2]. ندعي أن متساوي الأضلاع.

A picture containing wire, different, vector graphics

Description automatically generated

الشكل 1-4-1: [1-1]

لأن A مركز الدائرة ، [**تعريف** 1-33] (كل منهما نصف قطر). لأن مركز الدائرة ، (كل منهما نصف قطر). حسب [الموضوعة 9 الجزء 1-3-1[،.

لأن هذه القطع هي أضلاع ، فإن متساوي الأضلاع [تعريف 1-21]. لأن مبني على القطعة ، فقد أثبتنا ادعاءنا. 󠄀

ملاحظة: [1-1] - [1-3] توطئتان لـ[1-4].

**ملاحظة:** قد تبدو هذه **القضية** غريبة بالنسبة للقراء المطلعين على البراهين الرياضية الحديثة. تُظهر الإثباتات من القرن الحادي والعشرين عادةً أن بعض الكائنات الرياضية غير الملموسة إما موجودة أو غير موجودة، بينما [1-1] تصف طريقة إنشاء كائن، ثم تثبت أن هذا الكائن هو ما كنا ننوي بنائه.

في عصر إقليدس، كانت الرياضيات مشابهة للهندسة والإنشاء. إذا تمكنت من إثبات وجود شيء ما، ولكنك لم تستخدم هذه المعرفة للمساعدة في إنشاء شيء ملموس، فأنت على الطريق الصحيح لتصبح مُعدم (فقير) بدوام كامل.

يجب على الطلاب المعاصرين رسم أو إنشاء أي كائنات موصوفة في هذه القضايا.

**أسئلة الامتحان.**

1- ماذا نفترض في هذا **القضية**؟

2- ما ادعاؤنا؟

3- ما هي القطعة المستقيمة المحدودة؟

4- ما هو عكس المحدود؟

5- ما المسلمات التي استشهد بها وأين استشهد بها؟

6- ما الموضوعات التي استُشهد بها وأين استُشهد بها؟

7- ما فائدة تعريف الدائرة؟ ما هي الدائرة؟

8- ما هو المثلث متساوي الأضلاع؟

تمارين

يجب محاولة حل التمارين رقم 2# - 5# بعد أن يكمل الطالب الفصل الأول.

1- إذا أنشئت القطعتين و ، فأثبت أن الشكل معين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا أنشئت ومدت إلى محيط الدوائر (عند النقطتين D وE)، اثبت أن المثلثين و متساويا الأضلاع. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- إذا مدت و لتتقاطعا مع المحيطين عند النقطتين G وH، فأثبت أن النقاط G وF وH متسامتة وأن متساوي الأضلاع.

4- أنشئ واثبت أن .

### القضية 1-2. إنشاء قطعة مستقيمة مساوية لقطعة مستقيمة أخرى من نقطة معينة.

بأي قطعة ونقطة، من الممكن إنشاء قطعة أخرى بحيث:

(1) تكون النقطة إحدى نهايتي القطعة الجديدة.

(2) يكون طولها مساوي لطول القطعة.

**الإثبات** لنفترض أن A نقطة اعتباطية على المستوى، و أي قطعة. ادعاؤنا مذكور أعلاه.

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-2: [1-2] في بداية الإثبات (على اليسار)، الإنشاء الجزئي (على اليمين)

أنشئ ، وعلى أنشئ المتساوي الأضلاع [1-1]. أنشئ الدائرة ، التي مركزها ونصف قطرها . مد لتتقاطع مع الدائرة عند [**مسلمة** 2 الجزء 1-2]. أنشئ الدائرة ، التي مركزها ونصف قطرها . مد لمقابلة عند F.

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-3: [1-2] الإنشاء الكامل

**الإثبات:** من الواضح أن نهاية من نهايتي (ادعاء 1). إذا تمكنا من إظهار أن ، فسنكون قد أثبتنا ادعاءنا. لأن و نصفا قطر ، [تعريف 1-32]. لأن متساوي الأضلاع، [تعريف 1-21] حسب [الموضوعة 2 من الجزء 1-3-1]، نجد أن

لكن و حسب [الموضوعة 5 من الجزء 1-3-1]، نجد أن .

لأن و نصفا قطر في ،. حسب [الموضوعة 9 من الجزء 1-3-1] (المساويان لنفس الشيء متساويان)، (ادعاء 2)، وهذا يكمل الإثبات.

**تمارين**

1- اثبت [1-2] عندما تكون A نقطة على . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### القضية 1-3. تقسيم قطعة مستقيمة.

**لأي قطعتين، غير متساويتين، من الممكن تقسيم القطعة الكبرى إلى قطعتين جزئيتين تكون إحداهما مساوية في الطول للقطعة الصغرى.**

**الإثبات** أَنْشِئْ القطعتين و بشرط أن . ندعي أنه يمكن تقسيم إلى القطعتين و ، بحيث إن .

من ، أنشئ بشرط أن [1-2].󠄀 أنشئ التي مركزها ونصف قطرها [**مسلمة** 1-3] التي تتقاطع مع عند E.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 1-4-4: [1-3]

لأن A مركز ، [تعريف 1-32]. لأن (حسب الإنشاء). حسب [الموضوعة 9 من الجزء 1-3-1]، ، وهذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**اللازمة.** 1-3-1 لأي قطعة وشعاع، من الممكن قطع قطعة من الشعاع مساوية في الطول للقطعة.

**أسئلة الامتحان.**

1- ما القضية السابقة التي وظفت في هذا حل؟

2- ما الموضوعة المستخدمة في التوضيح؟

3- وضح كيفية مد القطعة الأقصر من أي قطعتين حتى يتساوى طول القطعة الممتدة مع طول القطعة الأطول.

**تمارين**

1- اثبت [اللازمة 1-3-1].

### قضية 1-4. مبرهنة "ضلع-زاوية-ضلع" لتطابق المثلثات.

**إذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في آخر، على الترتيب، وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في الأول تساوى الزاوية المناظرة في الثاني، فإن المثلثين متطابقان.**

**الإثبات** إذا كان و و في و ، إذا  
 .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-5: [1-4]

تذكر أن التراكب يسمح لنا بتحريك كائن فوق آخر دون تشويه شكله أو قياسه. إذا وضع على بشرط أن توضع النقطة على النقطة و على ، فإن النقطة تتطابق مع النقطة E لأن .

لأن يتطابق مع ، فإن يتطابق أيضًا مع ؛ لأن . لأن ، فإن تتطابق مع .

لأن تتطابق مع ، فإن القاعدة لـ تتطابق مع القاعدة لـ ، ويترتب على ذلك أن  
 .

ومن ثم فإن جميع أضلاع وزوايا أحد المثلثين متساوية مع الأضلاع والزوايا المناظرة في المثلث الآخر. نستنتج أن

**ملاحظة** تحتوي أصول إقليدس على ثلاث قضايا حول تطابق المثلثات: [1-4] ضلع- زاوية – ضلع [1-8]، ضلع- ضلع- ضلع، و [1-26] زاوية - زاوية -ضلع وزاوية-ضلع- زاوية.

**أسئلة الامتحان.**

1- ما المقصود بالتراكب؟

2- كم عدد الأجزاء التي تشكل مثلثًا؟ (الإجابة 6، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.)

3- إذا طُلب أن نثبت أن مثلثين متطابقان، فكم عدد الأجزاء من أحدهما يجب أن يكون متساويًا مع الأجزاء المناظرة من الآخر؟ (الإجابة. بشكل عام، أي ثلاثة ما عدا الزوايا الثلاث. سنثبت هذا في [1-8] و [1-26]، وكلاهما يستخدم [1-4].)

**تمارين**

1- اثبت أن الخط الذي ينصف الزاوية الرأسية في مثلث متساوي الساقين ينصف القاعدة، أيضًا، عموديًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا تساوى ضلعان متجاوران في شكل رباعي ونَصّف القطر الزاوية بينهما، فأثبت أن الضلعين المتبقيين متساويان في الطول، أيضًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- إذا نَصفت قطعتان كل منهما الأخرى عموديًا، فاثبت أن أي نقطة على أي من القطعتين يكون بعداها عن نهايتي الأخرى متساويين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- إذا أنشئت مثلثات متساوية الأضلاع على أضلاع أي مثلث، فاثبت أن المسافات بين رؤوس المثلث الأصلي والرؤوس المقابلة في المثلثات متساوية الأضلاع متساوية. (يمكن إثبات ذلك بعد دراسة [1-32].)

### القضية 1-5 المثلثات متساوية الساقين I.

**لأي مثلث متساوي الساقين:**

**(1) إذا مدت أضلاع المثلث، بخلاف القاعدة، فإن الزاويتين الموجودتين أسفل القاعدة متساويتان في القياس.**

**(2) الزاويتان على القاعدة متساويتين في القياس.**

**الإثبات** أنشئ بشرط أن واعتبر الضلع قاعدة المثلث. أنشئ عن طريق مد وأنشئ عن طريق مد بحيث يصبح . ندعي:



سنثبت كل ادعاء على حدى.

الادعاء 1:

لنفترض أن نقطة على بخلاف أو . على ، اختر النقطة بشرط أن [1-3]. (لأن  
 ، هذه النقطة ليست نهاية للقطعة). أنشئ و [تطبيقان على **مسلمة** 1 من الجزء 1-2].

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-6: [1-5]

لأن (حسب الإنشاء) و ، حسب الفرضية، نستنتج من ذلك أن الضلعين و في متساويان في الطول، على التوالي، مع الضلعين و في . أيضًا، الزاوية هي الزاوية المحصورة بين كل من زوجي الأضلاع في كل مثلث. حسب [1-4]، ؛ وهذا يقتضي أن و .

فيما يخص و : بما أن و و ، حسب [1-4]  
 . وهذا يقتضي أن ، وهما الزاويتان أسفل قاعدة ؛ أو،

هذا يثبت الادعاء 1.

الادعاء 2:

بما أن ، إذًا . حسب الإثبات السابق،

لاحظ أن:

هذا يثبت الادعاء 2 ويكمل الإثبات. 󠄀

ملاحظة ترجع الصعوبة، التي قد يواجهها بعض المبتدئين في هذا القضية، إلى حقيقة أن و متداخلان. يجب على المعلم أو الشارح رسم هذه المثلثات بشكل منفصل والإشارة إلى الأجزاء المتناظرة: ، ، و .حسب [1-4]، يتبع ذلك أن و .‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬‬

**اللازمة** 1-5-1 يكون المثلث متساوي الأضلاع فقط إذا كان متساوي الزوايا.

**تمارين**

1- اثبت أن الزاويتين الموجودتين على القاعدة متساويتان دون مد الضلعين.

2- اثبت أن محور التماثل لـ . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- اثبت أن كل قطر للمعين هو محور تناظر للمعين.

4- حدد نقطة المنتصف لكل ضلع في أي مثلث متساوي الأضلاع؛ اثبت أن القطع التي تصل بينهم تشكل مثلث آخر متساوي الأضلاع. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

5- اثبت [**اللازمة**. 1-5-1].

### القضية 1-6: المثلثات متساوية الساقين II.

**إذا تساوت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين للزاويتين المتساويتين متساويان في الطول (أي إن المثلث متساوي الساقين).**

**الإثبات** أنشئ بشرط أن . من أجل إثبات ادعاءنا أن ، سنستخدم البرهان بالتناقض.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-7: [1-6]

بدون فقدان للعمومية، افترض أن . على ، أنشئ نقطة بشرط أن [1-3]، وأنشئ . لاحظ أن (أي مساحة أكبر من 0)؛ وإلا لن يكون موجودًا.

فيما يخص و : بما أن و ، وكل مثلث يحتوي على ، حسب [1-4] . يترتب على ذلك أن .

لكن ، وبالتالي فإن (أي أن مساحة تساوي 0). ولكن أعلاه أظهرنا أن . إذًا و ، هذا تناقض.

على وجه التحديد، افترضنا أن وحصلنا على تناقض. إذا افترضنا بدلاً من ذلك أن ، فسنحصل على نفس التناقض (هذا ما نعنيه بعبارة "بدون فقدان العمومية"؛ هناك طريقتان لبدء الإثبات، وفي كلا الحالتين نحصل على نفس النتيجة). لأن كل من الفرضين و ينتج عنه تناقض، يجب أن يكون ، هذا يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 1-6-1. تشير [1-5] و [1-6]، معًا، إلى أن المثلث يكون متساوي الساقين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان الموجودتان عند قاعدته متساويتان.

أسئلة الامتحان.

1- ما الفرضية في هذه القضية؟

2- ما القضية التي تكون هذه القضية مقلوبها؟

3- ما عكس inverse هذه **القضية**؟

4- ما عكس [1-5]؟

5- ما المقصود بالإثبات بالتناقض؟

6- كيف يثبت إقليدس- عمومًا- القضايا المقلوبة؟

7- ما الافتراض الخاطئ الذي بواسطته أثبتت القضية؟

8- إلى ماذا يؤدي هذا الافتراض الخاطئ؟

تمارين

1- اثبت [اللازمة. 1-6-1].

### القضية 1-7. مثلثات متميزة.

**لأي مثلثين مختلفين، إذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في الآخر، على التوالي، فإن الضلع الثالث من الأول لا يساوي ما يناظره في الثاني.**

**نص القضية بطريقة أخرى: لأي قطعتين منشئتين من نهايتي قطعة مستقيمة ويلتقيان في نقطة، لا يمكن إنشاء قطعتين أُخريين من نهايتي نفس القطعة ويلتقيان في نقطة على نفس الجانب النقطة السابقة ويكونان مساويتين للقطعيتين السابقتين، على التوالي.**

**الإثبات** أنشئ المثلثين المختلفين ، المشتركان في القاعدة . افترض أن . ندعي أن.

Chart, polygon

Description automatically generated

الشكل 1-4-8: [1-7]، حالة 1

قد تكون رأس المثلث الثاني إما داخل أو خارج المثلث الأول.

الحالة 1: الرأس خارج المثلث.

افترض أن رأس كل مثلث يقع خارج الجزء الداخلي من المثلث الآخر (أي، لا تقع داخل وC لا تقع داخل  
 ). أنشئ . لأن حسب الفرضية، متساوي الساقين. حسب [اللازمة 1-6-1]، .

بما أنّ و ، نتيجةً لذلك، [1-3-1 موضوعة 12]. ولأن  
، فإن، أيضًا، . بما أن ، فإن  
 .

فيما يخص . بما أن ، حسب [اللازمة 1-6-1] نجد أن ، هذا يثبت ادعاءنا.

الحالة 2: الرأس داخل المثلث الآخر.

افترض أن رأس المثلث يقع داخل الجزء الداخلي من . مد لإنشاء و لإنشاء . أنشئ . لأن حسب الفرضية، فإن المثلث متساوي الساقين؛ حسب [1-5]

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-9: [1-7]، الحالة 2

بما أن ، نستنتج من ذلك أن [1-3-1 موضوعة 12]. لأن  
 ، فإن، أيضًا . بما أن ، نجد أن  
 .

فيما يخص . بما أنّ ، حسب [اللازمة 1-6-1]، نجد أن ، هذا يثبت ادعاءنا ويكمل الإثبات. 󠄀

**اللازمة** 1-7-1. يكون أي مثلثين مختلفين، إذا لم يتساو طول أحد أضلاع أحدهما مع طول أي ضلع في الثاني.

**تمارين**

1- اثبت [اللازمة. 1-7-1].

### القضية 1-8. مبرهنة "ضلع-ضلع-ضلع" لتطابق المثلثات.

**لأي مثلثين، إذا كانت كل الأضلاع المتناظرة متساوية، فإن المثلثين متطابقين.**

**الإثبات:** افترض أن و مثلثين فيهما و و (حيث و هما قاعدتا المثلثين). ندعي أن: .

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-10: [1-8]

افترض وضع على بشرط أن تتطابق النقطة مع النقطة ويتطابق مع . لأن ، فإن النقطة تتطابق مع النقطة . إذا كان الرأس يقع على نفس الجانب من ، الذي تقع عليه الرأس ، فيجب أن تتطابق النقطة مع النقطة .

إذا لم يكن هذا صحيحًا، فيجب أن يكون لـ موقع مختلف: سنسمي هذه النقطة . فرضيتنا تنص على أن و . حسب [1-3-1 موضوعة 8]، فإن . وبالمثل، . ومع ذلك، حسب [1-7]،  
 ، وهذا تناقض.

ومن ثم يجب أن تتطابق النقطة مع النقطة ، وبالتالي فإن الزوايا الثلاث للمثلث الأول تساوي، على التوالي، زوايا المثلث الثاني (على وجه التحديد، و و ). لذلك،  
 .

**أسئلة الامتحان.**

1- ما فائدة [1-7] في هذه القضية؟ (الجواب: كانت توطئة لـ[1-8].)

2- هل يمكن دمج [1-7] و [1-8] في قضية؟ وإذا كان ممكنًا، كيف؟

### القضية 1-9. تنصيف زاوية مستقيمة.

**من الممكن، تنصيف زاوية.**

الإثبات أنشئ ، والنقطة على ، والنقطة على ، بشرط أن [1-3]. أنشئ ؛ أنشئ، أيضًا، المثلث المتساوي الأضلاع [1-1] بشرط أن تقع على الجانب الآخر من ، الذي لا تقع عليه . أنشئ . ندعي أن ينصف .

A picture containing shape

Description automatically generated

الشكل 1-4-11: [1-9]

فيما يخص و : كل مثلث يشارك الضلع و حسب الإنشاء، و حسب الإنشاء. حسب [1-8]، ، وهكذا، فإن . لاحظ أن

أو، ينصف ، وهذا يكمل البرهان. 󠄀

**اللازمة** 1-9-1. إذا مُد لإنشاء الخط ، فإن محور التماثل و والشكل ، والقطعة .

**اللازمة** 1-9-2. في [1-9]، يمكن إنشاء و كخطوط أو أشعة أو قطع بطول مناسب بحيث تكون النقطة الرأس، مع إجراء ما يلزم من تعديل.

**أسئلة الامتحان.**

1- لماذا يبني إقليدس مثلث متساوي الأضلاع على الضلع المقابل لـ ؟

2- إذا أنشئ المثلث المتساوي الأضلاع على الجانب الآخر من ، في أي حالة سيفشل الإنشاء؟

تمارين

1- أثبت [1-9] دون استخدام [1-8]. (تلميح: استخدم [1-5، 2#].)

2- اثبت أن . (تلميح: استخدم [1-5، 2#].) [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- أثبت أن أي نقطة على ، تكون متساوية البعد عن النقطتين و . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- اثبت [اللازمة. 1-9-1].

5- اثبت [اللازمة. 1-9-2].

### القضية 1-10. تنصيف قطعة.

**من الممكن تنصيف أي قطعة (أي أنه من الممكن تحديد نقطة منتصف لأي قطعة).**

**الإثبات** أنشئ ؛ ندعي أنه يمكن تنصيف .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-12: [1-10]

أنشئ المثلث المتساوي الأضلاع الذي قاعدته [1-1]. نَصِّف عن طريق إنشاء [1-9] التي تتقاطع مع عند . من الواضح أن . ندعي أن (أي أن مُنصّف عند ).

فيما يخص و: (لأن كل منهما ضلع في المثلث المتساوي الأضلاع )؛ كل مثلث يشارك ؛ حسب الإنشاء. حسب [1-4]، ، لذلك . بالتالي،

وهذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

تمارين

1- نصّف قطعة بإنشاء دائرتين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- مد لإنشاء . اثبت أن كل النقاط متساوية البعد عن النقطتين و تقع على . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### القضية 1-11. إنشاء قطعة عمودية I.

**من الممكن إنشاء قطعة عمودية على أي خط من أي نقطة عليه.**

**الإثبات** أنشئ الذي يحتوي على النقطة . على ، اختر أي نقطة ؛ على ، اختر بشرط أن [1-3]. أنشئ المثلث متساوي الأضلاع على [1-1] وأنشئ . ندعي أن .

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-4-13: [1-11]

فيما يخص و : كل مثلث يشارك الضلع و حسب الإنشاء و لأن   
 متساوي الأضلاع. حسب [1-8] ، ولذلك . بما أن هاتين الزاويتين متجاورتان، فإن [تعريف. 1-13] ينص على أن كل زاوية منهما هي زاوية قائمة، وهذا يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 1-11-1. [1-11] تظل صحيحة إذا كانت قطعةً أو شعاعًا و / أو عندما تكون خطًا مستقيمًا أو شعاعًا، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

**تمارين**

1- اثبت أن قطري المعين ينصفان بعضهما البعض عموديًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- اثبت [1-11] دون استخدام [1-8].

3- جد نقطة على أي خط تكون متساوية البعد عن أي نقطتين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- جد نقطة على أي خط بشرط إذا وصلت بنقطتين على جانبي الخط، فإن الخط ينصف الزاوية المتكونة بالقطعتين الواصلتين بين النقطة والنقطتين. (تلميح: مشابه لإثبات #3)

5- جد نقطة متساوية البعد عن أي ثلاث نقاط. (تلميح: أنت تبحث عن المركز المحيطي للمثلث.)

6- اثبت [اللازمة. 1-11-1].

### القضية 1-12. إنشاء قطعة عمودية II.

**يمكن إنشاء قطعة عمودية على أي خط من نقطة ليست على الخط.**

**الإثبات** أنشئ و بشرط ألا تكون على . نرغب في إنشاء بشرط أن تقع على و

A picture containing sky

Description automatically generated

الشكل 1-4-14: [1-12]

خذ أي نقطة من على جانب المقابل للجانب الذي تقع عليه نقطة C. أنشئ التي نصف قطرها [مسلمة 1-3] حيث تتقاطع مع عند النقطتين و . نصف عند [1-10] وأنشئ [**قضية** 1-1]. ندعي أن:   
.

أنشئ . فيما يخص و : حسب الإنشاء، المثلثان يتشاركان الضلع ،  
 لأن كل منهما نصف قطر لـ [تعريف 1-32]. حسب [1-8]، ولذلك   
. بما أن هاتين الزاويتين متجاورتان، حسب [تعريف. 1-13] فإن كل منهما زاوية قائمة، هذا يثبت ادعاءنا.

**اللازمة** 1-12-1. [1-12] صحيحة إذا استُبدل بـ CH و / أو AB أشعة، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

**تمارين**

1- برهن على أن الدائرة لا يمكنها أن تتقاطع مع عند أكثر من نقطتين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- اثبت [اللازمة. 1-12-1]

### القضية 1-13. الزوايا عند تقاطعات الخطوط المستقيمة.

**إذا تقاطع خط مع آخر، فإن الخطين إما أن يكونا متعامدين أو يكون مجموع أي زاويتين متجاورتين عند تقاطعهما يساوي زاويتين قائمتين.**

**الإثبات** إذا تقاطع الخط مع الخط عند ، فإننا ندعي أن كل من و يساوي زاوية قائمة أو يساوي زاويتين قائمتين.

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-15: [1-13] الحالة الأولى على اليسار، الحالة الثانية على اليمين

إذا كان كما في الشكل 1-4-15، فإن كل من و تساوي زاوية قائمة.

بخلاف ذلك، كل من و ليست زاوية قائمة كما في الشكل 1-4-15. أنشئ

[1-11]. لاحظ أن [تعريف 1-11]. بإضافة لكل جانب من هذه المعادلة، نحصل على

وبالمثل، نجد أن

حسب [1-3-1 موضوعة 8]، نجد أن

بما أنّ و زاويتان قائمتان، فإن مجموع يساوي مجموع زاويتين قائمتين، هذا يثبت ادعاءنا.

**إثبات بديل:**

الإثبات. أشر إلى بـ . لاحظ أن:

اللازمة 1-13-1. **القضية** أعلاه تظل صحيحة إذا استُبدل بالخطوط المستقيمة قطع و / أو أشعة، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

اللازمة 1-13-2. مجموع أي زاويتين مكملتين لبعضهما البعض يساوي زاويتين قائمتين.

اللازمة 1-13-3. لا يمكن أن يتقاطع خطان مستقيمان مختلفان في قطعة.

اللازمة 1-13-4. مُنصف أي زاوية ينصف زاويتها المنعكسة.

اللازمة 1-13-5. مُنصفا أي زاويتين مكملتين لبعضهما البعض، متعامدان.

اللازمة 1-13-6- الزاوية

تمارين

1- اثبت [اللازمة. 1-13-1].

2- اثبت [اللازمة. 1-13-2].

3- اثبت [اللازمة. 1-13-3].

4- اثبت [اللازمة. 1-13-4].

5- اثبت [اللازمة. 1-13-5].

6- اثبت [اللازمة. 1-13-6].

### القضية 1-14. أشعة إلى خطوط مستقيمة.

**إذا كان هناك شعاعان مبنيان عند نهاية شعاع آخر وعلى جانبين مختلفين منه بحيث يكون مجموع الزاويتين المتجاورتين يساوي زاويتين قائمتين، فإن هذين الشعاعين يشكلان خطًا.**

**الإثبات:** أنشئ .󠄀 على جانبي ، أنشئ و بحيث يكون مجموع الزاويتين المتجاورتين، يساوي زاويتين قائمتين. ندعي أن:

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-16: [1-14]

افترض بدلا من ذلك أن و . بما أن خط و واقف عليه، فإن المجموع  
 يساوي زاويتين قائمتين [1-13]. أيضًا، حسب الفرضية، المجموع يساوي زاويتين قائمتين. لذلك،

لأن و ، هذا تناقض. ومن ثم، ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

اللازمة 1-14-1. ما سبق ينطبق على القطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

**تمارين**

1- اثبت [اللازمة. 1-14-1].

### القضية 1-15. كل زاويتين متقابلتين متساويتين

**إذا تقاطع خطان عند نقطة، فإن كل زاويتين متقابلتين متساويتان.**

**الإثبات** افترض أن و يتقاطعان عند . ندعي أن و .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-17: [1-15]

لأن يتقاطع مع عند ، فإن المجموع يساوي زاويتين قائمتين [1-13]. وبالمثل، لأن يتقاطع مع عند ، فإن المجموع يساوي أيضًا زاويتين قائمتين. وبالتالي،

وبالمثل، يمكننا أن نظهر أن ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**إثبات بديل:**

لأن الزاويتين المتقابلتين لهما نفس الزاوية المكملة، فإنهما متساويتان. 󠄀

**اللازمة** 1-15-1. [1-15] تظل صحيحة إذا استُبدل بأحد الخطين المستقيمين أو كلاهما قطعة أو شعاع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

**أسئلة الامتحان لـ [1-13] - [1-15].**

1- ما المسألة المطلوبة في إثبات إقليدس لـ [1-13]؟

2- ما المبرهنة المطلوبة؟ (الإجابة: لا مبرهنة، فقط موضوعات.)

3- إذا تقاطع خطان، فكم عدد أزواج الزوايا المكملة لبعضها البعض.

4- ما العلاقة بين [1-13] و [1-14]؟

5- ما الخطوط الثلاثة المتقاطعة في [1-14]؟

6- اذكر مقلوب القضية [1-15] واثبته.

7- ما موضوع [1-13]، [1-14]، [1-15]؟ (الإجابة: الزوايا عند نقطة.)

تمارين

1- اثبت [**اللازمة**. 1-15-1].

### القضية 1-16. الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من أي من الزوايا الداخلية عدا المجاورة لها.

**إذا مد أي ضلع من أضلاع مثلث، فإن الزاوية الخارجية الناتجة تكون أكبر من أي من الزوايا الداخلية عدا المجاورة لها.**

**الإثبات** أنشئ ، مد الضلع لإنشاء . ندعي أن الزاوية الخارجية أكبر من أي من الزوايا الداخلية عدا المجاورة لها؛ و .

Diagram

Description automatically generated

الشكل 1-4-18: [1-16]

نصف عند [1-10] وأنشئ [مسلمة 1-1]. مد لإنشاء بحيث إن [1-3]. أيضًا، أنشئ .

فيما يخص و : حسب الإنشاء، و حسب الإنشاء، و [1-15]. حسب [1-4]، ، ولذلك فإن . بما أنّ  
 و ،

نستنتج من ذلك أن .

وبالمثل، إذا نُصفت ، فيمكن إثبات أن ، وهذا يكمل الإثبات.󠄀

**اللازمة** 1-16-1. مجموع الزوايا الداخلية الثلاث للمثلث يساوي مجموع الزوايا الداخلية الثلاث للمثلث  
 .

**اللازمة** 1-16-2. .

**اللازمة** 1-16-3. إذا مُد الضلعان و لإنشاء خطين، فلن يلتقيا على أي بعد محدود.

السبب: إذا التقيا عند أي نقطة ، فحينئذٍ سيكون للمثلث زاوية خارجية تساوي الزاوية الداخلية .

**التمارين**.

1- اثبت [اللازمة. 1-16-1].

2- اثبت [اللازمة. 1-16-2].

3- اثبت [اللازمة. 1-16-3] باستخدام الإثبات بالتناقض.

### القضية 1-17. مجموع زاويتين داخليتين في مثلث.

**مجموع أي زاويتين داخليتين في مثلث أقل من زاويتين قائمتين.**

**الإثبات** ندعي أن مجموع أي زاويتين داخليتين في أقل من زاويتين قائمتين.

A picture containing chart

Description automatically generated

شكل 1-4-19: [1-17]

فيما يخص و ، مد الضلع لإنشاء . حسب [1-16]، . أضف لكل منهما.

حسب [1-13]، يساوي زاويتين قائمتين؛ وبالتالي، أقل من زاويتين قائمتين.

وبالمثل يمكننا أن نبين أن المجموعين و كل منهما أقل من زاويتين قائمتين، مع ما يلزم من التبديل والتعديل. نفس الحِجَّة تنطبق على ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**اللازمة** 1-17-1. أي مثلث فيه زاويتان حادتان، على الأقل.

**اللازمة** 1-17-2. لأي زاويتين غير متساويتين في مثلث، تكون الزاوية الأصغر حادة.

**تمارين**

1- اثبت [1-17] دون مد أي ضلع. (حاول الحل بعد الانتهاء من الفصل الأول. تلميح: استخدم مبرهنات الخطوط المتوازية.)

2- اثبت [اللازمة. 1-17-1]

3- اثبت [اللازمة. 1-17-2].

### القضية 1-18. الزوايا والأضلاع في مثلث I.

**إذا كان أحد أضلاع مثلث أكبر من آخر، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأكبر يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأصغر.**

**الإثبات** أنشئ الذي له الضلعان و حيث . ندعي أن قياس الزاوية المقابلة لـ أكبر من الزاوية المقابلة لـ ؛ أو،

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-4-20: [1-18]

على ، حدد بشرط أن [1-3]، وأنشئ ؛ لاحظ أن متساوي الساقين. حسب [1-6]، . لأن حسب [1-16]، . لأن  
 ، فإن ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**تمارين**

1- أثبت أنه إذا كان الضلعان الأكبر والأصغر في شكل رباعي متقابلين، فإن الزاويتين على أصغر تكون أكبر من الزاويتين المقابلتين لهما.

2- في أي مثلث، أثبت أن العمود من الرأس المقابل للضلع الأكبر يقع داخل المثلث.

### القضية 1-19. الزوايا والأضلاع في مثلث .

**في أي مثلث، إذا كانت إحدى الزوايا أكبر في القياس من أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر.**

**الإثبات** أنشئ ، حيث . ندعي أن .

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-4-21: [1-19]

إذا ، فإما أو .

1- إذا كان ، فإن ، متساوي الساقين و [اللازمة 1-6-1]. هذا يناقض الفرضية ، ولذلك .

2- إذا كان ، فإن [1-18]. هذا يناقض الفرضية ، ولذلك فإن  
 .

لذلك، يجب أن . 󠄀

**اللازمة** 1-19-1. في أي مثلث، تقف الأضلاع الأطول مقابل الزوايا الداخلية الأكبر وتقف الزوايا الداخلية الأصغر مقابل الأضلاع الأصغر.

**تمارين**

1- اثبت هذه القضية باستخدام الإثبات المباشر.

2- اثبت أن أي قطعة من رأس مثلث متساوي الساقين إلى أي نقطة على القاعدة أقل من الساق إذا كان التقاطع داخل المثلث، ولكنها أكبر- من الساق- إذا كانت نقطة التقاطع مع القاعدة الممتدة تقع خارج المثلث.

3- اثبت أنه لا يمكن إنشاء ثلاث قطع متساوية ومختلفة من نفس النقطة إلى نفس الخط. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- فيما يخص [1-16]، الشكل 1-4-18: إذا كان هو أطول ضلع في ، فإن هو أطول ضلع في و .

5- في ، إذا ، فإن المنشأة من إلى أي نقطة على الضلع ، أصغر من . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- اثبت [اللازمة. 1-19-1].

### القضية 1-20. مجموع أطوال أي زوج من أضلاع أي مثلث.

**في أي مثلث، يكون مجموع أطوال أي زوج من الأضلاع أكبر من طول الضلع المتبقي.**

**الإثبات** أنشئ ، ندعي أن .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-22: [3-20]

مد لإنشاء بحيث إن [1-3]، وأنشئ .

فيما يخص : 󠄀 حسب الإنشاء ، ولذلك، [1-5].󠄀لأن  
 ، .حسب [1-19]، .

لاحظ أن

ولذلك ، هذا يثبت ادعاءنا.

**إثبات بديل**:

**الإثبات** أنشئ ، ندعي أن . نَصّف عن طريق إنشاء [1-9]. ولذلك،  
 . ويترتب على ذلك أن [1-19]. وبالمثل، . نستنتج من ذلك أن

.

هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**تمارين**

1- افترض أن و و هي أطوال أضلاع أي مثلث. -أثبت أن:

2- أي طول أي ضلع من أي مضلع أصغر من مجموع الأضلاع الأخرى.

3- محيط أي مثلث أكبر من محيط أي مثلث مُدرج به inscribed و أصغر من أي مثلث محيط له circumscribed . (انظر أيضًا [تعريف 4-1].)

4- محيط أي مضلع أكبر من محيط أي مضلع مُدرج به (وأقل من محيط المضلع المحيط له) وله نفس عدد الأضلاع.

5- محيط الشكل الرباعي أكبر من مجموع قطريه. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- مجموع أطوال المتوسطات الثلاثة للمثلث أقل من المحيط: [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### القضية 1-21. مثلثات داخل مثلثات.

**في أي مثلث، إذا أنشئت قطعتين من نهايتي قاعدته إلى أي نقطة داخل المثلث، فعندئذٍ:**

**(1) مجموع طولي هاتين القطعتين أقل من مجموع الساقين.**

**(2) تحصر هاتان القطعتان زاوية أكبر من ساقي المثلث.**

الإثبات أنشئ الذي قاعدته ، وأنشئ داخل . أخيرًا، أنشئ ، . ندعي أن:

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-23: [3-21]

الادعاء 1: .

مد لإنشاء بحيث تقع على . في ، نجد أن [1-20]. نستنتج أن

وبالمثل، في ، نجد أن ، نستنتج من ذلك أن

من هاتين المتباينتين، نحصل على ، هذا يثبت الادعاء 1.

الادعاء 2:.

حسب [1-16]، . وعلى نحو مماثل، . نستنتج أن  
 ، هذا يثبت الادعاء 2 ويكمل الإثبات.

**إثبات بديل** للادعاء 2 لا يحتاج إلى مد الضلعين و :

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-24: [3-21 ، إثبات بديل]

**الإثبات** أنشئ و على النحو الوارد أعلاه. أيضًا، أنشئ ومده ليتقاطع مع عند . فيما يخص   
 و . حسب [1-16]، و : فإن

هذا يكمل الإثبات. 󠄀

**تمارين**

1- مجموع أطوال الأضلاع المنشأة من أي نقطة داخل المثلث إلى رؤوسه أقل من محيط المثلث.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-4-25: [1-21، # 2]

2- إذا كان الخط المضلع المحدب يقع داخل الخط المضلع المحدب وينتهي عند نهايتي الأول، أثبت أن طول أقل من طول .

### القضية 1-22. إنشاء مثلثات من قطع.

**من الممكن إنشاء مثلث تساوي أضلاعه، على التوالي، أطوال أي ثلاث قطع، بشرط أن مجموع طولي أي زوج من القطع أكبر من طول القطعة المتبقية.**

**الإثبات** افترض أن  و و هم أي قطع ينطبق عليها شرط الفرضية.

Diagram

Description automatically generated

الشكل 1-4-26: [1-22]

أنشئ بحيث يحتوي على القطع و و [1-3]. أنشئ الدائرة التي مركزها ونصف قطرها [الجزء 1-2، مسلمة 3]. أنشئ الدائرة التي مركزها ونصف قطرها . تتقاطع مع في . أنشئ ، . ندعي أن هو المثلث المطلوب.

لأن هي مركز ، . لأن حسب الإنشاء، . أيضًا، حسب الإنشاء،  
 و . لذلك، فإن الأضلاع الثلاثة للمثلث تساوي، على التوالي، القطع الثلاثة و و ، هذا يثبت ادعاءنا.

**تمارين**

1- اثبت أنه عند تحقق الشروط المذكورة أعلاه يجب أن تتقاطع الدائرتان.

2- إذا كان مجموع أي قطعتين يساوي طول القطعة الثالثة، فأثبت أن القطع لن تتقاطع.

### القضية 1-23. إنشاء زوايا متساوية.

### من الممكن إنشاء زاوية مساوية لأي زاوية عند أي نقطة.

**الإثبات** لأي زاوية ونقطة . ندعي أنه من الممكن إنشاء زاوية تساوي عند .

Chart

Description automatically generated with low confidence

الشكل 1-4-27: [1-23]

أنشئ ، وأنشئ المثلث حيث و و [1-22]. حسب [1-8]،  
 ، لذلك .

تمارين

1- أنشئ المثلث، إذا علمت ضلعين فيه وزاوية بينهما. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- أنشئ المثلث، إذا علمت زاويتين فيه والضلع بينهما.

3- أنشئ المثلث، إذا علمت ضلعين فيه والزاوية المقابلة لأحدهما.

4- أنشئ المثلث، إذا علمت قاعدته وإحدى زاويتي القاعدة والمجموع أو الفرق بين أطوال الأضلاع.

### القضية 1-24. الزوايا والأضلاع في مثلث III.

**لأي مثلثين، إذا ساوى ضلعين في مثلث ضلعين في الآخر، على التوالي، وكانت الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين غير متساويتين. فإن الضلع الثالث للمثلث ذي الزاوية الداخلية الأكبر أطول من الضلع الثالث للمثلث ذي الزاوية الداخلية الأصغر.**

**الإثبات** أنشئ مثلثين و حيث و و . ندعي أن  
 .

A picture containing boat

Description automatically generated

شكل 1-4-28: [1-24]

أنشئ النقطة على بحيث ، افترض أن ؛ حسب [1-19، # 5]، نجد أن . مد لإنشاء حيث [1-3].

أنشئ و . في المثلثين، و ، حسب الإنشاء، و و   
. حسب [1-4]، ، لذلك، .

لاحظ أن ، لأن . لأن حسب الإنشاء، متساوي الساقين؛ وبالتالي، [1-5]. نستنتج من ذلك أن .وبما أن،  
 ، فإن، .

حسب [1-19]، . لأن حسب ما سبق، فإن ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

بدلاً من هذا الإثبات، يمكن إثبات الجزء الختامي لهذه القضية دون إنشاء .

**الإثبات.** افترض الفرضيات وأنشئ المثلثين كما في الإثبات السابق، ندعي أن هذا الاثبات لا يتطلب إنشاء .

لاحظ أن

لذلك

لأن و حسب الإنشاء، فإن

هذا يثبت ادعاءنا.

**إثبات بديل:الإثبات** في ، نصّف الزاوية عن طريق إنشاء . في و ، الضلعان و في مثلث يساويان، على التوالي، الضلعان و في الآخر، والزاويتان المحصورتان متساويتان. حسب [1-4]، . ويترتب على ذلك أن . لكن [1-20]، ولذلك، . لأن ، ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**ملاحظة.** سيلاحظ القارئ الآن أن عدد المراجع الصريحة للتعريفات والموضوعات والنظريات قد تضاءل. هذا أمر طبيعي في الكتابة الرياضية. مع أنّها دون المستوى الأمثل للقارئ. مثل هذه الممارسة أمر طبيعي؛ لأن غير ذلك من شأنه أن يضع عبئًا مستحيلًا على الكاتب. سيتمنى أحد القراء لو أشرت إلى خصائص التباين للجمع والطرح في الإثبات السابق. قد يتعرض شخص آخر للإهانة إذا أوقفت الإثبات للاستشهاد بشيء واضح للغاية. ومع ذلك، سيسأل قارئ آخر لماذا افتُرضت خصائص التباين للجمع والطرح بدلاً من إثباتها. لا يوجد كاتب يستطيع أن يلبي المطالب المتناقضة. أفضل طريقة بالنسبة للمؤلف هو أن يتجاهل كل ما يراه واضحًا وأن يترك التحري للقارئ.

**تمارين**

1- اثبت هذه القضية عن طريق إنشاء الزاوية على يسار AB.

2- اثبت أن .

### القضية 1-25. الزوايا والأضلاع في المثلث .

**إذا ساوى ضلعان في مثلث، على التوالي، ضلعان في آخر، وكان الضلع الثالث في أحدهما لا يساوي الضلع الثالث في الآخر، فإن المثلث ذا الضلع الثالث الأكبر، سيكون له زاوية داخلية أكبر من المثلث الآخر.**

**الإثبات** أنشئ و بحيث إن و و .

ندعي أن: .

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-4-29: [1-25]

افترض بدلًا من ذلك أن ، لأن و حسب الإنشاء. حسب [1-4]  
 ، ولذلك . هذا يتناقض مع الفرضية ؛ لذلك، .

افترض أن . لأن و . حسب [1-24]، . هذا يتناقض مع الفرضية ؛ ولذلك، .

لأن و ، هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**اللازمة** 1-25-1. أنشئ و حيث و . حسب [1-24] و [1-25]، فقط إذا كانت .

**التمارين**.

1- وضح هذه القضية باستخدام الإثبات المباشر بإنشاء قطعة على طولها يساوي .

### القضية 1-26. تطابق المثلثات؛ ضلع وزاويتان داخليتان متساويتان.

**إذا ساوى ضلع في مثلث ضلع في آخر، وساوت الزاويتان الداخليتان في أحدهما، على التوالي، الزاويتين الداخليتين في الآخر، فإن المثلثين متطابقان.**

عادةً ما يُعبر عن هذه القضية في صورة مبرهنتين:

1- **التطابق "زاوية - ضلع - زاوية"**. إذا كان الضلعان اللذان يصلان بين الزاويتين المتساويتين في كل مثلث متساويين، فإن المثلثين متطابقان.

2- **التطابق "زاوية - زاوية- ضلع"**. إذا كان الضلعان اللذان لا يصل بين الزاويتين المتساويتين في كل مثلث متساويين، فإن المثلثين متطابقان.

سنثبت هذا القضية في الحالتين.

**الإثبات** أنشئ و حيث و . ندعي أنه إذا كان أحد أضلاع  
 مساويًا في الطول لضلع مناظر في ، فإن .

A picture containing text, sky, line, day

Description automatically generated

الشكل 1-4-30: [1-26]، حالة 1

**الحالة 1 زاوية - ضلع - زاوية**

افترض أن . إذا كان ، افترض أن حيث هي نقطة على بشرط أن . أنشئ ، لاحظ أن . (إذا ، فإن ، تناقض.)

في و : ،، و . حسب [1-4]، ، لذلك . بما أنّ حسب الفرضية، و  
 ؛ بالتالي و ، هذا تناقض. لذلك، .

لأن و و ، حسب [1-4]، .

**حالة 2 زاوية - زاوية- ضلع**

افترض أن .

A picture containing text, sky, green, line

Description automatically generated

الشكل 1-4-31: [1-26]، حالة 2

إذا ، افترض أن حيث هي نقطة على بشرط أن . أنشئ . في و  
 : و و . حسب [1-4]، ، لذلك  
 . لأن حسب الفرضية، . أي إن الزاوية الخارجية لـ تساوي الزاوية الداخلية وغير المجاورة لها، وتتعارض مع [1-16]. لذلك .

لأن و و ، حسب [1-4] .

هذا يثبت كلا الادعائيين، ويكمل الإثبات. 󠄀

**تمارين**

1- اثبت أن نهايتي قاعدة المثلث المتساوي الساقين متساويتا البعد عن أي نقطة على القطعة العمودية من الزاوية الرأسية على القاعدة.

2- اثبت أنه إذا كان الخط الذي يُنصف الزاوية الرأسية لمثلث ينصف القاعدة أيضًا، فإن المثلث متساوي الساقين.

3- على أي خط مستقيم، جد نقطة بشرط أن يكون العمودان منها على أي خطين، متساويين. اذكر أيضًا عدد الحلول.

4- أثبت أنه إذا كان لأي مثلثين قائمين وترين متساويين، وكانت الزاوية الحادة لأحدهما تساوي الزاوية الحادة للآخر، فإنهما متطابقان.

5- اثبت أنه إذا كان لأي مثلثين قائمين وترين متساويين وكان أحد أضلاع أحدهما يساوي ضلع في الآخر، فإنهما متطابقان. (ملاحظة: هذا يثبت الحالة الخاصة لتطابق (ضلع-ضلع-زاوية) للمثلثات القائمة.)

6- منصفا الزاويتين الخارجيتين ومنصف الزاوية الداخلية الثالثة يتقاطعون.

7- مرورًا بأي نقطة، أنشئ خط مستقيم بشرط أن العمودين عليه من نقطتين على جانبين مختلفين منه، متساويان.

8- عبر أي نقطة، أنشئ خط مستقيم يتقاطع مع أي خطين ويشكل معهما مثلثًا متساوي الساقين.

## 1-5󠄀 الكتاب الأول، القضايا 27-48

تعريفات إضافية بخصوص الخطوط المتوازية:

**الخطوط المتوازية**

40- أي خطين مستقيمين، في نفس المستوى، ولا يلتقيان أبدًا، يقال إنهما **متوازيان**. وإذا لم تلتق الأشعة أو القطع مهما مدت لإنشاء خطوط، يُقال أيضًا أنها **متوازية**.

41- **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين.

42- **القطر** هو القطعة التي تصل بين أي زاويتين متقابلتين في أي شكل رباعي. انظر الشكل 1-5-1.

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-1: [تعريف 1-41] و [تعريف 1-42]: هي قطر المربع .

43- **ارتفاع المثلث** هو القطعة العمودية من قاعدة المثلث إلى الرأس المقابل لها.

45- **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان ومتوازيان.

46- عندما يتقاطع خط مستقيم مع خطين مستقيمين آخرين، يكون بينهم ثماني زوايا (انظر الشكل 1-5-2).

• الزاويتان 1 و2 زاويتان خارجيتان؛ وكذلك الزاويتان 7 و8.

• الزاويتان 3 و4 زاويتان داخليتان. وكذلك الزاويتان 5 و6.

• الزاويتان 4 و6 زاويتان متبادلتان. وكذلك الزاويتان 3 و5.

• الزاويتان 1 و5 زاويتان متناظرتان. وكذلك الزاويتان 2 و6، 3 و8، 4 و 7.

تظل هذه التعريفات صحيحة إذا استبدلنا بالخطوط أشعة أو قطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

A picture containing antenna

Description automatically generated

الشكل 1-5-2: [تعريف 1-46]

### القضية 1-27. خطوط متوازية I

**إذا تقاطع خط مع خطين آخرين وكانت الزوايا المتبادلة متساوية، فإن الخطين متوازيان.**

**الإثبات** افترض أن يتقاطع مع و بحيث إن . ندعي أن  .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-3: [1-27]

إذا كان ، فإن و يتقاطعان عند النقطة حيث يكون طول محدودًا.

يترتب على ذلك أن هو مثلث حيث زاوية خارجية و زاوية داخلية غير مجاورة. حسب [1-16]، ، لكن حسب الفرضية، هذا تناقض. لذلك، . 󠄀

### القضية 1-28. خطوط متوازية .

**افترض أن خطًا يتقاطع مع خطين آخرين.**

**1) خطوط متوازية II. إذا كانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المناظرة، فإن الخطين متوازيان.**

**2) الخطوط المتوازية III. إذا كان مجموع الزاويتين الداخليتين على نفس الجانب يساوي زاويتين قائمتين، فإن الخطين متوازيان.**

**الإثبات** افترض أن يتقاطع مع و .

Chart, diagram, box and whisker chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-4: [1-28] و [1-29]

**ادعاء 1: إذا ، فإننا ندعي أن .**

لأن ، يتقاطعان عند ، [1-15]. حسب الفرضية، . بما أن هاتين الزاويتين متبادلتان، فإن حسب [1-27]، وهذا يثبت ادعاءنا.

**الادعاء 2: إذا يساوي زاويتين قائمتين، ندعي أن .**

بما أنّ و زاويتان متجاورتان، حسب [1-13] المجموع يساوي زاويتين قائمتين. بما أنّ ،

بما أنّ و زاويتان متبادلتان، حسب [1-27]، هذا يثبت ادعاءنا ويكمل الإثبات.

### القضية 1-29. خطوط متوازية IV

**إذا تقاطع خط مع خطين متوازيين، فعندئذٍ:**

**(1) كل زاويتين متبادلتين متساويتان،**

**(2) الزوايا الخارجية تساوي الزوايا الداخلية المناظرة لها،**

**(3) مجموع أي زاويتين داخليتين على نفس الجانب يساوي زاويتين قائمتين.**

**الإثبات** إذا تقاطع مع و وكان ، فإننا ندعي أن:

(1) ( ،مع ما يلزم من التبديل أو التعديل)

(2) ( ، مع ما يلزم من التبديل أو التعديل)

(3) يساوي زاويتين قائمتين. ( يساوي أيضًا زاويتين قائمتين، مع ما يلزم من التبديل أو التعديل)

الادعاء 1: إذا ، فإن إحدى الزاويتين يجب أن تكون أكبر من الأخرى. لذلك، افترض أن  
 . فإننا نحصل على المتباينة

حيث يساوي مجموع زاويتين قائمتين حسب [1-13].󠄀نستنتج من ذلك أن

أقل من زاويتين قائمتين. حسب إثبات [1-27]، و يلتقيان على بعد محدود، هذا يتعارض مع فرضية أن . لذلك، ، هذا يثبت الادعاء 1.

ادعاء 2: لأن حسب [1-15] و حسب الادعاء 1، فإن ، وهذا يثبت الادعاء 2.

الادعاء 3. لأن حسب الادعاء 1،

بما أنّ يساوي مجموع قائمتين، فإن يساوي زاويتين قائمتين. هذا يثبت الادعاء 3 ويكمل الإثبات.

اللازمة **1-29-1. عبارات مكافئة تتعلق بالخطوط المتوازية.**

إذا تقاطع خط مع خطين آخرين، فإن الخطين متوازيين إذا وفقط إذا كان أي من هذه الخصائص الثلاثة:

(1) كل زاويتين متبادلتين متساويتان،

2) الزوايا الخارجية تساوي الزوايا الداخلية المناظرة لها

3) مجموع الزاويتين الداخليتين على نفس الجانب يساوي زاويتين قائمتين.

اللازمة 1-29-2. يمكن استبدال قطع ذات أطوال مناسبة أو أشعة بالخطوط في [1-29، اللازمة 1]، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

Chart, diagram, box and whisker chart

Description automatically generated

الشكل 1-55-: [1-28] و [1-29]

تمارين

**ملاحظة** قد نستخدم [1-31] في إثباتات هذه **التمارين** لأن إثبات [1-31] لا يتطلب [1-29].

1- اثبت كلا جزأي [1-28] دون استخدام [1-27].

2- أنشئ الذي يحتوي على النقطة و الذي يحتوي على النقطة بحيث . أنشئ و بشرط أن يُنصف و يُنصف . اثبت أن . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- إذا أنشئ أي قاطع آخر خلال نقطة المنتصف لأي قاطع لخطين متوازيين، فإن الجزء المقطوع من القاطع الآخر بالخطين المتوازيين يُنصف عند .

5- أي خطين يمران بنقطة متساوية البعد عن خطين متوازيين يقطعان قطعتين متساويين على المتوازيين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6-أنشئ محيط متوازي الأضلاع المكون عن طريق إنشاء موازيان لضلعين من مثلث متساوي الأضلاع من أي نقطة على الضلع الثالث. هذا المحيط يساوي 2 × الضلع.

7- إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل سداسي متساويين ومتوازيين، فاثبت أن أقطاره تتقاطع.

8- إذا وازت قطعتان متقاطعتان، على التوالي، قطعتين أخريين، فإن الزاويتين المحصورتين بين كل قطعتين متساويتين.

(تلميح: إذا وازى ، ، على التوالي، و و إذا تقاطع و عند ، فإن الزاويتين عند و يساويان الزاوية عند [ 1-29] . )

### القضية 1-30. التعدية للخطوط المتوازية.

**الخطان الموازيان لنفس الخط متوازيان مع بعضهما البعض.**

**الإثبات.** أنشئ الخطوط و و بحيث و . ندعي أن:

.

Chart, box and whisker chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-6: [1-30]

أنشئ أي خط قاطع . 󠄀لأن ، [اللازمة 1-29-1]. لأن ،  
 [اللازمة 1-29-1]. نستنتج من ذلك أن . بما أنّ  
 و . حسب [1-27]، .󠄀

اللازمة 1-30-1 يمكن استبدال قطع ذات أطوال مناسبة أو أشعة بـ و و و في [1-30]، مع إجراء التعديلات **اللازمة**.

### القضية 1-31. إنشاء خط موازي.

**نرغب في إنشاء خط موازي لأي خط مرورًا بأي نقطة ليست على الخط.**

**الإثبات** لأي خط و أي نقطة ليست عليه، نرغب في إنشاء الخط بحيث .

Rectangle

Description automatically generated with medium confidence

الشكل 1-5-7: [1-31]

حسب [1-23]، أنشئ على ، و ليست على بشرط أن بعد إنشاء ، . حسب [اللازمة 1-29-1]، .

تمارين

1- إذا علمت ارتفاع مثلث وزاويتي قاعدته، أنشئ المثلث. [راجع الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- من أي نقطة، أنشئ قطعة على أي قطعة بشرط أن تكن الزاوية الناتجة مساوية في القياس لزاوية معينة. وضح أن هناك حلين.

3- اثبت صحة الإنشاء التالي: لتثليث خط معين ، أنشئ على ، المتساوي الأضلاع. نصف الزاويتين عند النقطتين و بالخطين و . عبر ، أنشئ موازيين لـ و اللذين يتقاطعان مع عند و . ندعي أن و هما نقطتا التقسيم الثلاثي لـ .

4- ادرج مربع في مثلث متساوي الأضلاع بشرط أن تكون قاعدته على ضلع معين من المثلث.

5- عبر أي نقطتين على خطين متوازيين، أنشئ القطعتين اللتين يشكلان مع الخطين المتوازيين معينًا.

6- بين أي خطين في أي موضع. أنشئ قطعة ذات أي طول بحيث تكون موازية لأي خط. بين أن هناك حلان.

### القضية 1-32. الزوايا الخارجية ومجموع الزوايا في مثلث.

**إذا مُد ضلع مثلث، فإن**

**(1) الزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين؛**

**(2) مجموع الزوايا الداخلية الثلاث يساوي زاويتين قائمتين.**

**الإثبات** أنشئ ، وأنشئ عن طريق مد الضلع .

Chart, shape, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-8: [1-32]

الادعاء 1:

أنشئ [1-31].󠄀بما أن يتقاطع مع و ، فإن [1-29] .󠄀بما أن يتقاطع مع و ، فإن [1-29]. بما أنّ،

الادعاء 2: .

بجمع لكل طرف من المعادلة في الادعاء 1، نحصل على

حسب [1-13]، فإن يساوي زاويتين قائمتين، ولذلك،

وهذا يكمل البرهان.

اللازمة 1-32-1. إذا كان المثلث القائم الزاوية متساوي الساقين، فإن كل زاوية للقاعدة تساوي نصف زاوية قائمة.

اللازمة 1-32-2. إذا ساوت زاويتان في مثلث زاويتين في آخر، على التوالي، فإن الزاويتين المتبقيتين متساويتان أيضًا.

اللازمة 1-32-3. بما أنه يمكن تقسيم أي شكل رباعي إلى مثلثين، فإن مجموع زواياه يساوي أربع زوايا قائمة.

اللازمة 1-32-4. إذا قُسم شكل له أضلاع إلى مثلثات عن طريق رسم أقطار من أي من زواياه، فسنحصل على مثلثات. لذا، فإن مجموع زواياه يساوي زوايا قائمة.

اللازمة 1-32-5. إذا مدت جميع أضلاع أي مضلع محدب، فإن مجموع الزوايا الخارجية يساوي أربع زوايا قائمة.

اللازمة 1-32-6. كل زاوية في مثلث متساوي الأضلاع تساوي ثلثي زاوية قائمة.

اللازمة 1-32-7. إذا كانت إحدى زوايا مثلث تساوي مجموع الزاويتين الأخريين، فهذه الزاوية قائمة.

اللازمة 1-32-8. يمكن تقسيم كل مثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متساويي الساقين بواسطة خط مبني من الزاوية القائمة إلى الوتر.

تمارين

1- قسم زاوية قائمة ثلاثيًا.

2- إذا مدت أضلاع مضلع له n من الأضلاع، فإن مجموع الزوايا بين كل زوج متبادل (ضلع و ضلع ممتد) يساوي زوايا قائمة

3- إذا كان الخط الذي يقسم زاوية رأسية خارجية لمثلث موازٍ لقاعدة المثلث، فإن المثلث يكون متساوي الساقين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- إذا كان المثلثان القائمان و على نفس الوتر وإذا وصلت الرأسان و ، فإن زوج الزوايا الواقفة مقابل أي ضلع من الشكل الرباعي الناتج متساويتان.

5- اثبت أن الارتفاعات الثلاثة للمثلث تتقاطع. ملحوظة: نحن نثبت وجود **المركز العمودي أو ملتقى الارتفاعات** للمثلث: النقطة التي تتقاطع فيها الارتفاعات الثلاثة، وإحدى **نقاط التلاقي** في المثلث. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- منصفات الزوايا المتجاورة في متوازي الأضلاع تتعامد مع بعضها البعض. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

7- تُشكل منصفات الزوايا الخارجية للشكل الرباعي شكلًا رباعيًا محيطيًا، مجموع كل زاويتين متقابلتين فيه يساوي زاويتين قائمتين.

8- إذا كانت الأضلاع الثلاثة لمثلث ما متعامدة على التوالي مع أضلاع مثلث آخر، فإن المثلثين متساويا الزوايا. (قد تؤجل هذه المسألة حتى نهاية الفصل 1.)

9- أنشئ المثلث القائم الزاوية، إذا علمت الوتر ومجموع أو فرق الأضلاع.

11- الزاوية المحصورة بين المنصف الداخلي لزاوية قاعدة لمثلث والمنصف الخارجي لزاوية القاعدة الأخرى تساوي نصف الزاوية الرأسية.

12- في إنشاء [1-18]، اثبت أن الزاوية تساوي نصف الفرق بين زاويتي القاعدة.

13- إذا كانت تشير إلى زوايا مثلث، فاثبت أن و و هي زوايا المثلث المكون من أي ضلع ومنصفي الزاويتين الخارجيتين بين هذا الضلع وامتداد الضلعين الآخرين.

14- اثبت [اللازمة. 1-32-1].

15- اثبت [اللازمة. 1-32-2].

16- اثبت [اللازمة. 1-32-3].

17- اثبت [اللازمة. 1-32-4].

18- اثبت [اللازمة. 1-32-5].

19- اثبت [اللازمة. 1-32-6].

20. اثبت [اللازمة. 1-32-7].

21- اثبت [اللازمة. 1-32-8].

### القضية 1-33. قطع متوازية.

**القطعتان الواصلتين بين النهايتين المتجاورتين لقطعتين متساويتين ومتوازيتين يكونان متوازيتين ومتساويتين في الطول.**

**الإثبات** افترض أن و . أنشئ الشكل . ندعي أن و .

A picture containing sky, line

Description automatically generated

الشكل 1-5-9: [1-33] و [1-34]

أنشئ . لأن حسب الفرضية و يتقاطع معهما، [اللازمة 1-29-1].

فيما يخص و : ، والمثلثان يشتركان في ، و . حسب [1-4]،   
.

يترتب على ذلك أن و . حسب [اللازمة 1-29-1]، تقتضي ذلك أن ، هذا يُكمل الإثبات.

**اللازمة** 1-33-1. [1-33] صحيحة للخطوط المستقيمة والأشعة، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

**اللازمة** 1-33-2. الشكل 󠄀 متوازي أضلاع [تعريف 1-39].

**تمارين**

1- أثبت أنه إذا القطعتان و متساويتين ومتوازيتين، على التوالي، مع ، ، فإن التي تصل نهايتي الزوج الأول تكون متساوية في الطول مع القطعة التي تصل نهايتي الزوج الأخير. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

### القضية 1-34. الأضلاع والزوايا المتقابلة لمتوازيات الأضلاع.

**كل ضلعين متقابلين، في متوازي الأضلاع، متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان أيضًا وكل قطر ينصف متوازي الأضلاع.**

**الإثبات** أنشئ الشكل . ندعي أن:

(1) و ؛

(2) .   
(3)

(4) أي من القطرين ( أو ) ينصف متوازي الأضلاع.

أنشئ . في و : لأن حسب الإنشاء و يتقاطع معهم، و [1-29]. أيضًا، و يشاركان الضلع . حسب [1-26]،  
 : ولذلك و (الادعاء 1) و (الادعاء 2).

الآن، و . بما أنّ و  
 حسب [اللازمة 1-29-1]، نحصل على

(الادعاء 3).

لأن و ، . يترتب على ذلك أن يُنصف الشكل . يمكن إثبات الحالة المتبقية بنفس الطريقة مع ما يلزم من التبديل والتعديل، إذا أنشئنا بدلاً من (الادعاء 4).󠄀

**اللازمة** 1-34-1.

**اللازمة** 1-34-2. إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع زاوية قائمة، فإن كل زاوية من زواياها قائمة.

**اللازمة** 1-34-3. إذا تساوي ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع، فهذا يعني أنه معين.

**اللازمة** 1-34-4. إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متساويين في الطول، فهذا يعني أنه متوازي أضلاع.

**اللازمة** 1-34-5. إذا كان كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي متساويتين، فهذا يعني أنه متوازي أضلاع.

Chart, line chart

Description automatically generated

**اللازمة** 1-34-6. إذا نصف القطران كل منهما الآخر في شكل رباعي، فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

**اللازمة** 1-34-7. إذا نصف القطران الشكل الرباعي، فإن الشكل متوازي أضلاع.

**اللازمة** 1-34-8. إذا تساوت الأضلاع المتجاورة في متوازي أضلاع، فإن القطرين ينصفان زوايا المتوازي.

**اللازمة** 1-34-9. إذا تساوت الأضلاع المتجاورة في متوازي الأضلاع، فإن قطريه يتقاطعان عموديًا.

**اللازمة** 1-34-10. في أي متوازي أضلاع قائم، القطران متساويان في الطول.

**اللازمة** 1-34-11. إذا كان قطري متوازي الأضلاع متعامدين، فإن متوازي الأضلاع معين.

**اللازمة** 1-34-12. إذا نصف قطر متوازي الأضلاع الزاويتين التي يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع معين.

**تمارين**

1- اثبت أن قطري متوازي الأضلاع ينصفان بعضهما البعض. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا تساوى قطرا متوازي الأضلاع، فإن كل زاوية من زواياه قائمة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- ستلتقي القطعتان الواصلتان بين كل نهايتين متجاورتين لقطعتين متوازيتين غير متساويتين عند مدهما على جانب القطعة المتوازية الأصغر.

4- إذا توازى ضلعان متقابلان في شكل رباعي، ولكنهما غير متساويين في الطول وكان الآخران متساويين ولكن غير متوازيين، فإن كل زاويتين متقابلتين مكملتين لبعضهما البعض.

5- أنشئ المثلث إذا علمت نقاط منتصف أضلاعه الثلاثة.

6- اثبت [اللازمة. 1-34-1].

7- اثبت [اللازمة. 1-34-2].

8- اثبت [اللازمة. 1-34-3].

9- اثبت [اللازمة. 1-34-4].

10- اثبت [اللازمة. 1-34-5].

11- اثبت [اللازمة. 1-34-6].

12- اثبت [اللازمة. 1-34-7].

13- اثبت [اللازمة. 1-34-8].

14- اثبت [اللازمة. 1-34-9].

15- اثبت [اللازمة. 1-34-10].

16- اثبت [اللازمة. 1-34-11].

17- اثبت [اللازمة. 1-34-12].

### القضية 1-35. مساحات متوازيات الأضلاع I.

**متوازيات الأضلاع على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيين متساوية في المساحة.**

**الإثبات** سنثبت ثلاث حالات.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-10: [1-35]، حالة 1

**الحالة 1**: أنشئ الشكلين 󠄀 و على القاعدة وبين المتوازيان و حيث يشترك و في القاعدة والرأس عند . ندعي أن .

حسب [اللازمة 1-34-1]، 󠄀 ، هذا يثبت الحالة 1.

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-11: [1-35]، حالة 2

**الحالة 2**: أنشئ 󠄀 و على القاعدة وبين المتوازيين و حيث يشترك و في القاعدة و . ندعي أن 󠄀 .

لأن 󠄀 متوازي أضلاع، [1-34]؛ لأن 󠄀 متوازي أضلاع، ، وبالتالي . لاحظ أن

فيما يخص و : و [1-34] و حسب [1-29، اللازمة. 1]. حسب [1-4]، . لاحظ أن

لأن ، ، هذا يثبت حالة 2.

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-12: [1-35]، حالة 3

**الحالة 3**: أنشئ 󠄀 و على القاعدة وبين المتوازيين و حيث يشترك و في القاعدة والنقطة حيث ليس رأسًا. ندعي أن 󠄀 .

لاحظ أن . لأن و و ، فإن  
 .

فيما يخص و : ، و حسب [1-29]. حسب [1-4]، ويترتب على ذلك أن:

هذا يثبت حالة 3 ويكمل البرهان 󠄀

### القضية 1-36. مساحات متوازيات الأضلاع II.

**متوازيات الأضلاع على القواعد المتساوية وبين نفس المتوازيين متساويان في المساحة.**

**الإثبات** أنشئ و بين على القاعدتين و بحيث إن . ندعي أن .

Chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-13: [1-36]

أنشئ و . لأن متوازي أضلاع، [1-34]. لأن حسب الفرضية،  
 . عند معرفة هذه المعادلة و ، حسب [1-33] و . يترتب على ذلك أن متوازي أضلاع.

حسب [1-35]، 󠄀 و 󠄀. 󠄀لذلك، 󠄀 ، وهذا يُكمل الإثبات󠄀.

### القضية 1-37. مثلثات لها مساحات متساوية I.

**المثلثات التي تقف على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيان متساوية في المساحة.**

**الإثبات** أنشئ و على القاعدة بشرط أن كل مثلث يقف بين المتوازيين و . ندعي أن  
 .

Chart, line chart

Description automatically generated

الشكل 1-5-14: [1-37]

أنشئ و . يترتب على ذلك أن الشكلين و متوازيا أضلاع. حسب [1-35]، .

لاحظ أن لأن القطر AB يُنصف [1-34، # 1]. وبالمثل ، ولذلك

**تمارين**

1- إذا كان وقف أي مثلثين متساويين في المساحة على نفس القاعدة، ولكن على جانبين مختلفين من القاعدة، فإن القاعدة أو امتدادها تنصف القطعة التي تصل بين رأسيهما. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- أنشئ مثلثًا مساويًا في المساحة لأي شكل رباعي.

3- أنشئ مثلثًا مساويًا في المساحة لأي مضلع.

4- أنشئ معين مساوي في المساحة لأي متوازي أضلاع بحيث تكون قاعدته أحد أضلاع متوازي الأضلاع.

### القضية 1-38. مثلثات لها مساحات متساوية II.

**المثلثات التي تقف على قواعد متساوية وبين نفس المتوازيان متساوية في المساحة.**

**الإثبات** أنشئ و بين و بشرط أن و . ندعي أن  
 .

A picture containing shape

Description automatically generated

شكل 1-5-15: [1-38]

حسب [1-31]، أنشئ حيث هي نقطة على بشرط أن ؛ على نحو مماثل، أنشئ حيث هي نقطة على بشرط أن . يترتب على ذلك أن و متوازيا أضلاع. لأن ، حسب [1-36] .

لأن يُنصف و يُنصف حسب [1-34]، ، هذا يكمل الإثبات. 󠄀

**تمارين**

1- كل متوسط في مثلث ينصف المثلث. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في آخر، على التوالي، وكانت الزوايا الداخلية مكملة لبعضها البعض، فإن مساحتهما متساويتان.

3- إذا قُسمت قاعدة مثلث إلى أي عدد من القطع المتساوية، فإن القطع من الرأس إلى نقاط القسمة تقسم المثلث إلى العديد من الأجزاء المتساوية.

4- قطر متوازي الأضلاع والقطع من أي نقطة على القطر إلى الرأسين التي لا يمر خلالهما، تقسم متوازي الأضلاع إلى أربع مثلثات متساوية.

5- قطر الشكل الرباعي ينصف القطر الآخر إذا وفقط إذا كان ينصف الشكل الرباعي أيضًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- إذا كان و يقفان على القاعدة وبين نفس المتوازيان، وإذا التقى الموازي لـ مع الضلعين و عند النقطتين و ويلتقي الضلعين و عند النقطتين ، ، فإن .

7- إذا كان لدينا بدلاً من المثلثات على نفس القاعدة مثلثات على قواعد متساوية وبين نفس المتوازيان، فإن الجزء المقطوع بواسطة أضلاع المثلثات على أي موازٍ للقواعد تكون متساوية في الطول.

8- إذا وُصلت نقطتي منتصف أي ضلعين من مثلث، فإن مساحة المثلث المكون من نصفي الضلعين له مساحة تساوي ربع الكل.

9- المثلث الذي رؤوسه نقاط منتصف أي ضلعين وأي نقطة في قاعدة أي مثلث آخر له مساحة تساوي ربع مساحة ذلك المثلث.

10- نَصّف أي مثلث بقطعة منشئة من نقطة معينة في أحد الأضلاع.

11- قسم أي مثلث ثلاثيًا بثلاث قطع منشئة من أي نقطة بداخله.

12- اثبت أن أي قطعة تمر خلال تقاطع قطري متوازي الأضلاع تنصف متوازي الأضلاع.

13- المثلث المكون من توصيل نقطة المنتصف لأحد الأضلاع غير المتوازية للشبه المنحرف بنهايتي الضلع المقابل في شبه المنحرف يساوي نصف مساحة شبه المنحرف.

### القضية 1-39. مثلثات لها مساحات متساوية III.

**المثلثات متساوية المساحة التي تقف على نفس القاعدة وعلى نفس الجانب من القاعدة تقف أيضًا بين نفس المتوازيين.**

**الإثبات** افترض أن و يقفان على نفس القاعدة، ، وعلى نفس الجانب من ، وأن  
 ؛ ندعي أن و يقفان بين .

Chart

Description automatically generated with low confidence

الشكل 1-5-16: [1-39]

أنشئ . من الواضح أن المثلثين يقفان بين و . نحتاج فقط إلى إثبات أن .

لنفترض أن وأن حيث هي نقطة على غير ؛ أنشئ . لاحظ أن (إذا ، فإن ، هذا تناقض).

لأن المثلثين ، يقفان على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيين ( و )، نجد أن  
 [1-37]. حسب الفرضية، . لذلك، [موضوعة 1-1]. لكن ، ولذلك و . يحدث تناقض مشابه إذا وضعنا الحرف في أي مكان بخلاف .

يترتب على ذلك أن ، هذا يكمل الإثبات. 󠄀

### قضية 1-40. مثلثات لها مساحات متساوية IV

**المثلثات المتساوية المساحة التي تقف على قواعد متساوية وعلى نفس الجانب من قواعدها، تقف بين نفس المتوازيان.**

الإثبات أنشئ و على بشرط أن و و وكل مثلث على نفس الجانب من القاعدة. أنشئ . من الواضح أن و يقفان بين و ؛ ندعي أن .

Shape

Description automatically generated

شكل 1-5-17: [1-40]

إذا كان ، أنشئ (حيث هي نقطة على ) بشرط أن . أنشئ أيضًا . لاحظ أن  
 .

فيما يخص المثلثين و : إنهما يقفان على قاعدتين متساويتين ( ،) وبين نفس المتوازيين ( ، ). حسب [1-38]، .

لكن حسب الفرضية، ولذلك . لأن ، و . ينتج تناقض مشابه إذا وضعنا في أي مكان بخلاف .

يترتب على ذلك أن ، هذا يكمل الإثبات. 󠄀

**تمارين**

1- اثبت أن المثلثات ذات القواعد والارتفاعات المتساوية، تكون متساوية المساحة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- القطعة التي تصل بين نقطتي منتصف ضلعي مثلث تكون موازية للقاعدة، وكل من المتوسطين من نهايتي القاعدة إلى نقطتي المنتصف ينصف المثلث. ولذلك، فإن المثلثين اللذين قاعدتهما الضلع الثالث في المثلث ورأسيهما نقطتي التنصيف متساويان في المساحة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- الموازي لأي ضلع من أضلاع المثلث عبر نقطة المنتصف لآخر ينصف الثالث.

4- القطع التي تصل بين نقاط المنتصف لأضلاع المثلث تقسم المثلث إلى أربع مثلثات متطابقة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

5- القطعة التي تصل بين نقطتي المنتصف لضلعي مثلث تساوي في الطول نصف الضلع الثالث.

6- نقاط المنتصف للأضلاع الأربعة للشكل الرباعي المحدب، بالترتيب، هي رؤوس متوازي أضلاع مساحته تساوي نصف مساحة الشكل الرباعي.

7- مجموع الضلعين المتوازيين لشبه المنحرف هو ضعف طول القطعة التي تربط بين نقطتي المنتصف للضلعين المتبقيين.

8- إن متوازي الأضلاع المكون من القطعة التي تصل بين نقطتي المنتصف لضلعي مثلث وأي قطعتين متوازيتين عبر نفس النقطتين لمقابلة الضلع الثالث، يساوي نصف مساحة المثلث.

9- القطعة التي تصل نقطتي منتصف ضلعين متقابلين لأي شكل رباعي والقطعة التي تصل نقطتي منتصف قطريه يتقاطعان.

### قضية 1-41. متوازيات الأضلاع والمثلثات.

**إذا وقف متوازي أضلاع ومثلث على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيين، فإن متوازي الأضلاع ضعف مساحة المثلث.**

**الإثبات** أنشئ و على القاعدة وبين . ندعي أن .

Shape

Description automatically generated

شكل 1-5-18: [1-41]

أنشئ و . حسب [1-34]، ؛ حسب [1-37]، . لذلك، ، هذا يكمل الإثبات.

**اللازمة** 1-41-1. إذا كان لمثلث ومتوازي أضلاع ارتفاعات متساوية وإذا كانت قاعدة المثلث ضعف قاعدة متوازي الأضلاع، فإن مساحتيهما متساويتان.

**اللازمة** 1-41-2. لنفترض أن لدينا مثلثين بحيث إن قاعدتيهما ضلعان متقابلان لمتوازي أضلاع ورأسهما المشترك هو أي نقطة بين هذين الضلعين. فإن، مجموع مساحتي هذين المثلثين يساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع.

### قضية 1-42. إنشاء متوازيات الأضلاع I.

**لأي مثلث وزاوية حادة، من الممكن إنشاء متوازي أضلاع يساوي مساحة المثلث ويحتوي على الزاوية.**

**الإثبات** أنشئ و . نرغب في إنشاء 󠄀 بشرط أن و 󠄀 يحتوي على زاوية مساوية لـ .

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-5-19: [1-42]

نصف عند ، وأنشئ . أنشئ [1-23] و و [1-31].

لأن حسب الإنشاء، حسب [1-38]. لذلك، . حسب [1-41]، . لذلك، .

لأن󠄀 يحتوي على حيث ، هذا يكمل الإثبات

### قضية 1-43. متممات متوازيات الأضلاع.

**القطعتين الموازيتين عبر أي نقطة في أحد قطري متوازي الأضلاع تقسم متوازي الأضلاع إلى أربع متوازيات أضلاع أصغر: يُطلق على المتوازيين اللذين لا يمر عبرهما القطر متممين لمتوازيي الأضلاع الآخرين، وهذان المتممان متساويان في المساحة.**

**الإثبات.** أنشئ 󠄀 والقطر . 󠄀لنفترض أن أي نقطة على باستثناء و . أنشئ و عبر بحيث و . هذا يقسم إلى أربع متوازيات أضلاع أصغر حيث ، متممان لـ ، . ندعي أن .

Shape, polygon

Description automatically generated

شكل 1-5-20: [1-43]

لأن يُنصف متوازي الأضلاع 󠄀 و 󠄀 و حسب [1-34]، فإن و و . لذلك،

هذا يُكمل الإثبات. 󠄀

**اللازمة** 1-43-1. إذا أنشئنا قطعتين موازيتين (للأضلاع) خلال نقطة ما ( ) داخل متوازي الأضلاع إلى أضلاعه من أجل جعل و متساويان في المساحة، فإن تقع على القطر .

حسب [1-43]، نجد أن 󠄀 ، 󠄀 متساويان في المساحة إذا وفقط إذا كانت نقطة على القطر .

**اللازمة** 1-43-2-. و 󠄀.

**تمارين**

1- اثبت [1-43، اللازمة 1].

2- اثبت [1-43، اللازمة 2].

### القضية 1-44. إنشاء متوازيات الأضلاع II.

**لأي مثلث، وزاوية (حادة، أو قائمة، أو منفرجة)، وقطعة، يمكننا إنشاء متوازي أضلاع يساوي مساحة المثلث الذي يحتوي على الزاوية وله ضلع يساوي القطعة.**

**الإثبات** أنشئ و و . نرغب في إنشاء على بشرط أن و على زاوية تساوي .

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-5-21: [1-44]

أنشئ متوازي الأضلاع 󠄀 حيث 󠄀 [1-42]، . و . أنشئ أيضًا القطعة [1-31]. مد لإنشاء ، وأنشئ .

لأن و حسب الإنشاء، حسب [1-30]. لاحظ أن يتقاطع مع و ؛ وبالتالي، . يترتب على ذلك أن . حسب [1-3-3، موضوعة 4]، إذا مددنا و ، فسوف يتقاطعان عند نقطة ما . عبر ، أنشئ [1-31]، مد ليتقاطع مع عند ، ومد ليتقاطع مع في . ندعي أن يفي الشروط المطلوبة.

من الواضح أن BALM مبني على AB. حسب [1-43]، ، و حسب الإنشاء؛ لذلك . حسب [1-15]، و حسب الإنشاء؛ وبالتالي، . هذا يكمل الإثبات

### قضية 1-45. إنشاء متوازيات الأضلاع III.

**لأي زاوية (حادة، أو قائمة، أو منفرجة) وأي مضلع، يمكننا إنشاء متوازي أضلاع يساوي مساحة المضلع ويحتوي على زاوية مساوية للزاوية.**

**الإثبات** أنشئ المضلع و . نرغب في إنشاء 󠄀 بشرط أن يحتوي على زاوية تساوي و 󠄀.

A picture containing sky, different

Description automatically generated

شكل 1-5-22: [1-45]

حسب [1-42]. نبني و بشرط أن حيث .

على ، أنشئ 󠄀 بشرط أن حيث [1-44]. (قد نواصل استخدام هذه الخوارزمية لأي مثلثات إضافية متبقية في . هذا يسمح لنا أن ندعي أن الإثبات التالي ينطبق على أي مضلع له أضلاع حيث.) عند الانتهاء من هذه الخوارزمية، ندعي أن يفي بالشروط المطلوبة.

لأن حسب الإنشاء و . يترتب على ذلك أن

بما أن و يتقاطع معهما، فإن [1-29]. لذلك  
 ، ولذلك [1-14، اللازمة 1]. لأن حسب الإنشاء، فإن .

على غرار ما سبق، لأن يتقاطع مع المتوازيين و ، [اللازمة 1-29-1] ولذلك

بما أن و يتقاطع معهما، فإن [1-29]. لذلك،  
 و .

لأن 󠄀 و 󠄀 متوازيا أضلاع، فإن و متوازيان مع ؛ حسب [1-30]، . بما أنّ  
 مما ورد أعلاه، حسب [اللازمة. 1-29-1]، . لذلك، متوازي أضلاع.

بما أنّ ، 󠄀 يحتوي على زاوية تساوي .

A picture containing sky, swing, scale, different

Description automatically generated

شكل 1-5-23: [1-45]

لأن 󠄀 حسب الإنشاء و 󠄀،

هذا يكمل الإثبات󠄀

**تمارين**

1- أنشئ مستطيلًا يساوي مجموع من المضلعات.

2- أنشئ مستطيلاً يساوي الفرق بين مساحتي أي شكلين.

### قضية 1-46. إنشاء مربع I.

**على أي قطعة، يمكن إنشاء مربع.**

**الإثبات** أنشئ ؛ نرغب في إنشاء مربع على .

A picture containing text, handcart, scale, screenshot

Description automatically generated

شكل 1-5-24: [1-46]

أنشئ [1-11] حيث [1-3]. عبر ، أنشئ [1-31] حيث ، وعبر أنشئ . ندعي أن هو المربع المطلوب.

حسب الإنشاء،

لأن متوازي أضلاع، [1-34]؛ فإن الأضلاع الأربعة لـ متساوية. ويترتب على ذلك أن معين و قائمة. حسب [تعريف 1-30]، مربع. 󠄀

**ملحوظة** [1-46] توطئة لـ [1-47]. تُقدم [2-14] طريقة أخرى لإنشاء مربع.

**تمارين**

1- أثبت أن أضلاع أي مربعين لهم نفس الطول إذا وفقط إذا كان المربعان متساويين في المساحة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- اثبت أن متوازيات الأضلاع حول قطر المربع هي مربعات.

3- إذا أخذنا نقاط متساوية البعد عن الزوايا الأربع على الأضلاع الأربعة لمربع (أو على امتدادها)، فستُكون رؤوس مربع آخر (وبالمثل للخماسي المنتظم، السداسي، إلخ..).

4- قسّم أي مربع إلى خمسة أجزاء متساوية: على وجه التحديد، أربع مثلثات قائمة ومربع.

5- أثبت أن صيغة مساحة المستطيل هي .

### القضية 1-47. مبرهنة فيثاغورث (الملقبة بـ مبرهنة جوجو).

**في أي مثلث قائم، يكون المربع على الضلع المقابل للزاوية القائمة (الوتر) مساويًا لمجموع مساحتي المربعين على الضلعين الآخرين.**

**الإثبات** أنشئ مثلث قائم الزاوية حيث هو الوتر. ندعي أن:

Chart, radar chart

Description automatically generated

شكل 1-5-25: [1-47]

حسب [1-46]، يمكننا إنشاء مربعات على الأضلاع و و لـ كما في الشكل 1-5-25. أنشئ  
 حيث نقطة على . أيضًا أنشئ و . لأن و قائمتان حسب الإنشاء، المجموع يساوي، أيضًا، زاويتين قائمتين. لذلك [1-14]. وبالمثل، .

لأن و زاويتان داخل مربع، فهما قائمتان. لذلك

لأن و مربعان، فإن و . فيما يخص و : لأن و و ، حسب [1-4] .

حسب [1-41]، 󠄀. لأنهما يقفان على ويقفان بين المتوازيين و . وبالمثل،  
 لأنهما يقفان على وبين و . لأن ،  
 .

وبالمثل، يمكن إظهار أن 󠄀. لذلك،

هذا يثبت ادعاءنا. 󠄀

**ملحوظة** [1-47] هي حالة خاصة من [6-31].

**ملاحظة** 1-48. [**اللازمة** 10-28-1] تصف النسبة التي تُعطي الثلاثيات الفيثاغورسية (ثلاثة أعداد صحيحة موجبة ، ، بشرط أن ): إذا كان و عددين صحيحين موجبين و ، فإن الثلاثيات الفيثاغورسية لها النسبة

**إثبات بديل:**

**الإثبات** أنشئ المربعات كما في الشكل 1-5-26 بشرط أن يكون قائم الزاوية و هي الزاوية القائمة.

Chart, diagram

Description automatically generated

الشكل 1-5-26: [1-47]، إثبات بديل

أنشئ و ؛ عبر أنشئ . لاحظ أن ، و زاويتان قائمتان. نستنتج من ذلك أن

فيما يخص و : و ، و . حسب [1-4]،  
 .

حسب [1-41]، نجد أن 󠄀. وبالمثل، 󠄀 . 󠄀

**ملحوظة** الإثبات البديل أقصر لأنه ليس من الضروري إثبات أن و يشكلان قطعة واحدة. وبالمثل، يمكن إثبات القضية بأخذ أي من الأشكال الثمانية المتكونة عن طريق قلب المربعات في جميع الاتجاهات الممكنة. يمكن الحصول على تبسيط آخر للإثبات عن طريق الأخذ في الاعتبار أن النقطة هي نقطة حيث يمكن تدوير أحد المثلثين أو  
 في مستواه حتى يتطابق مع الآخر؛ ومن ثم فهما متطابقان.

**تمارين**

1- أثبت أن المربع الموجود على يساوي مساحة المستطيل والمربع على . (ملاحظة: يشير AB · AO إلى المستطيل المكون من القطعتين و .)

2- اثبت أن المربع الموجود على 󠄀.

3- اثبت أن

4- جد القطعة التي مربعها يساوي مجموع مساحتي أي مربعين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

5- لأي قاعدة مثلث والفرق بين مربعي ضلعيه، المحل الهندسي لرأسه هو قطعة عمودية مع قاعدته.

6- اثبت أن . و عبارة عن قطعتين قاطعتين.

7- إذا أنُشئت ، فإن.

8- يزيد المربع المُنشئ على مجموع أضلاع مثلث قائم عن المربع على الوتر بأربعة أضعاف مساحة المثلث (انظر [1-46، # 3]). بشكل عام، إذا كانت الزاوية الرأسية للمثلث مساوية لزاوية المضلع المنتظم الذي له عدد من الأضلاع، فإن المضلع المنتظم الذي له عدد من الأضلاع، المُنشئ على قطعة تساوي مجموع أضلاع المثلث يتجاوز مساحة المضلع المنتظم الذي له عدد من الأضلاع المبني على القاعدة بمقدار مضروب في مساحة المثلث.

9- إذا تقاطع و عند وأنشئت قطعة عبر موازية لـ ، لتقابل عند ، فإن .

10- اثبت أن كل من المثلثين و في [1-47] يساوي مساحة . [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

11- أوجد قطعة مربعها يساوي الفرق بين مربعين على قطعتين.

12- المربع على الفرق بين الضلعين و أقل من مربع الوتر بأربعة أضعاف مساحة المثلث.

13- إذا وُصلت ، فإن القطع و و تتقاطع.

14- في المثلث المتساوي الأضلاع، ثلاثة أضعاف المربع على أي ضلع يساوي أربعة أضعاف المربع على العمودي عليه من الرأس المقابل.

15- نبني المربع 󠄀 على ، وهو جزء من الضلع من المربع ، بحيث ضلعه امتداد . قسّم الشكل إلى ثلاثة أجزاء تشكل مربعًا.

16- أربعة أضعاف مجموع المربعات على المتوسطات التي تُنصف أضلاع مثلث قائم الزاوية تساوي خمسة أضعاف مربع الوتر.

17- إذا أنشئنا أعمدة على أضلاع المضلع من أي نقطة وقمنا بتقسيم كل ضلع إلى قطعتين، فإن مجموع المربعات على مجموعة من القطع المتبادلة يساوي مجموع المربعات على المجموعة المتبقية.

18- مجموع المربعين على القطعتين المنشأتين من أي نقطة إلى زاويتين متقابلتين في مستطيل يساوي مجموع المربعين على القطعتين من نفس النقطة إلى الزاويتين الأخريين.

19- قسّم وتر المثلث القائم الزاوية إلى جزأين بشرط أن يكون الفرق بين مربعيهما يساوي المربع الموجود على أحد أضلاعه.

### القضية 1-48. مقلوب مبرهنة فيثاغورث / جوجو.

**أنشئ مربعات على جميع أضلاع مثلث. إذا كان المربع الموجود على الوتر مساويًا في المساحة لمجموع مساحتي المربعين على الضلعين الآخرين، فإن الزاوية المقابلة للضلع الأطول قائمة.**

**الإثبات** أنشئ بشرط أن هو أطول ضلع و

ندعي أن: زاوية قائمة.

Chart, line chart

Description automatically generated

شكل 1-5-27: [1-48]

أنشئ بحيث [1-3] و [1-11]. أنشئ ، وفيما يخص : هي زاوية قائمة حسب الإنشاء. تقتضي أن ، وهكذا

حسب [1-47] ؛ حسب الفرضية، . ومن ثم ؛ يتبع ذلك أن [1-46، # 1].

فيما يخص و : ، حسب الإنشاء، ويشتركان في الضلع . حسب [1-8]، ولذلك بما أنّ زاوية قائمة حسب الإنشاء، فإن هي زاوية قائمة.

**إثبات** **بديل** **بالتناقض**:

A picture containing antenna

Description automatically generated

الشكل 1-5-28: [1-48]، إثبات بديل

الإثبات أنشئ بشرط أن . إذا كان غير عمودي على ، أنشئ بحيث إن . أنشئ .

فيما يخص و : ، والمثلثان يشتركان في الضلع ، وكما في الإثبات أعلاه، يمكن إظهار أن . هذا يتعارض مع [1-7]. بناءًا على هذا، هي زاوية قائمة 󠄀

**اللازمة** 1-48-1 لنفترض أن و و أضلاع حيث هو أطول ضلع. مثلث قائم الزاوية إذا وفقط إذا كان .

## أسئلة الامتحان على الفصل الأول.

1- ما هي الهندسة الرياضية؟

2- ما هو الكائن الهندسي؟

3- اذكر المفاهيم الأساسية للهندسة الرياضية. (الإجابة: النقاط، والخطوط، والأسطح والمجسمات.)

4- ما هي أنواع الخطوط في الهندسة؟ (الإجابة: مستقيم ومنحني.)

5- كيف يُنشئ الخط المستقيم؟ (الإجابة: عن طريق توصيل أي نقطتين.)

6- كيف يُنشئ الخط المنحني؟ (الإجابة: عن طريق توصيل أي ثلاث نقاط ليست متسامتة.)

7- ما هي أنواع الأسطح؟ (الإجابة مستوية ومنحنية.)

8- كيف يُنشئ سطح مستوي؟

9- لماذا لا يوجد أبعاد للنقطة؟

10- هل للخط عرض أو سمك؟

11- كم عدد أبعاد السطح؟

12- ما هي الهندسة المستوية؟

13- أي جزء من الهندسة المستوية هو موضوع هذا الفصل؟

14- ما هو موضوع الفصول المتبقية؟

15- كيف تُثبت قضية عن طريق الإثبات غير المباشر؟

16- ما المقصود بمقلوب قضية؟

17- ما القضية التي هي مثال على قاعدة التماثل؟

18- ما هي الأشكال المتطابقة؟

19- ما هي الطريقة الأخرى لوصف الأشكال المتطابقة؟ (الإجابة: هم متساوون من جميع النواحي.)

20. اذكر جميع حالات التساوي التي ليست تطابق في الفصل 1.

21- ما الفرق بين الرمز الذي يدل على التطابق والذي يدل على التساوي؟

22- عرف الزاويتين المتجاورتين، والخارجيتين والداخليتين والمتبادلتين.

23- ما المقصود بإسقاط خط على آخر؟

24- ما المقصود بمتوسطات المثلث؟

25- ما المقصود بالقطر الثالث للشكل الرباعي؟

26- اذكر بعض القضايا الواردة في الفصل 1 التي تمثل حالات خاصة لحالات أخري أعم.

27- ماذا يساوي مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع؟

28- كم عدد الشروط اللازمة لإنشاء مثلث؟ (الإجابة: ثلاثة؛ مثل الأضلاع الثلاثة، أو ضلعين وزاوية، إلخ.)

## تمارين الفصل 1.

1- افترض أن و مثلثين بحيث:

(أ) يُنشئ في

(ب) يمر كل ضلع من أضلاع عبر رأس لـ

(ج) كل ضلع من يوازي الضلع المناظر في

ندعي أن [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- الارتفاعات الثلاثة للمثلث الأول في # 1 هي الارتفاعات عند نقاط منتصف أضلاع المثلث الثاني.

3- عبر أي نقطة، أنشئ خط بشرط أن يُنصف الجزء المقطوع بواسطة قطعتي أي زاوية عند النقطة.

4- المتوسطات الثلاثة للمثلث تتقاطع. (ملاحظة: هذا إثبات لوجود **مركز كتلة المثلث**. يفضل استخدام مبرهنة سيفا Ceva’s Theorem، غير الموجودة في إقليدس، لحل هذه المسألة. يجب على الطلاب الذين يسعون إلى التحدي محاولة حل هذه المسألة دون استخدام مبرهنة سيفا.)

5- أنشئ المثلث إذا علمت ضلعين ومتوسط الضلع الثالث.

6- افترض أن محيط المثلث و مجموع أطوال متوسطات المثلث. أثبت أن .

7- أنشئ المثلث إذا علمت أحد أضلاعه ومتوسطي الضلعين الآخرين.

8- أنشئ المثلث إذا علمت المتوسطات الثلاثة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

9- الزاوية المحصورة بين العمود من الزاوية الرأسية لمثلث على القاعدة ومنصف الزاوية الرأسية تساوي نصف الفرق بين زاويتي القاعدة.

10- أوجد في متوازيين نقطتين متساويتي البعد عن أي نقطة بحيث القطعة الواصلة بينهما توازي خط معين.

11- أنشئ متوازي الأضلاع إذا علمت القطرين وضلع.

12- اثبت أن أقصر متوسط في المثلث يقابل الضلع الأكبر.

13- أوجد في متوازيين نقطتين تقفان مقابل زاوية قائمة عند نقطة معينة ومتساويي البعد عنها.

14- مجموع بعدي أي نقطة في قاعدة مثلث متساوي الساقين عن الساقين يساوي البعد بين أي من نهايتي القاعدة عن الضلع المقابل.

15- اثبت أن الأعمدة الثلاثة عند نقاط المنتصف لأضلاع المثلث تتقاطع.

16- ادرج شبيه لمعين في مثلث بحيث يكون له زاوية من زوايا المثلث. [انظر الفصل الأخير للتوصل إلى حل.]

17- ادرج مربعًا في مثلث بحيث تكون قاعدته على أحد أضلاع المثلث.

18- أوجد المحل الهندسي للنقطة التي مجموع أو فرق بعدها عن خطين ثابتين يساوي أي طول.

19- مجموع الأعمدة من أي نقطة داخل مثلث متساوي الأضلاع يساوي العمود من أي رأس على الضلع المقابل.

20. جد نقطة في أحد أضلاع مثلث بشرط أن يكون مجموع الجزئين المقطوعين بواسطة الضلعين الآخرين على المتوازيين المنشئين من نفس النقطة إلى هذين الضلعين مساويًا لأي طول.

21- إذا وازت قطعتا زاوية، على التوالي، قطعتي زاوية أخرى، فإن منصفيهما إما متوازيان أو متعامدان.

22- ادرج في أي مثلث متوازي أضلاع بحيث يتقاطع قطراه عند أي نقطة.

23- أنشئ شكل رباعي إذا علمت الأضلاع الأربعة وموضع نقطتي المنتصف لضلعين متقابلين.

24- إذا علمت قواعد مثلثين أو أكثر مشتركين في رأس، من حيث المقدار والموضع، ومجموع المساحات. اثبت أن المحل الهندسي للرأس هو خط مستقيم.

25- إذا علمت مجموع الأعمدة من أي نقطة على أضلاع أي مضلع، فإن المحل الهندسي للنقطة هو خط مستقيم.

26- إذا كان مثلث متساوي الساقين وكانت ساقاه ، وإذا كان أي قاطع يقطع الضلعين المتساويين عند و ، بشرط أن ، اثبت أن .

27- لأي نقطتين و ، وأي نقطة على أي خط ، فأثبت أن الفرق بين و هو الأقصى عندما ينصف الزاوية . وضح أن مجموعهما هو الأدنى إذا كان ينصف المكملة.

28- نصف شكل رباعي بقطعة منشأة من أحد رؤوسه.

29- إذا كان و خطين متوازيين مقطوعين بشكل مائل بواسطة وعموديًا بواسطة ، وبين هذه الخطوط نقوم بإنشاء ، الذي يقطع عند النقطة بحيث ، اثبت أن .

30. إذا كانت هي نقطة التقاء منصفات زوايا ، وإذا مدت لتتقاطع مع عند ، وإذا أنشئت من بشرط أن يكون ، اثبت أن .

31- الزاوية التي يصنعها منصفا زاويتين متتاليتين في شكل رباعي محدب تساوي نصف مجموع الزاويتين الأخريين؛ الزاوية التي يصنعها منصفا زاويتين متقابلتين تساوي نصف الفرق بين الزاويتين الأخريين.

32- إذا وصلنا في الإنشاء في [1-47] و ، فإن .

33- إذا علمت نقاط المنتصف لأضلاع مضلع محدب له عدد فردي من الأضلاع، فأنشئ المضلع.

34- قسم شكل رباعي ثلاثيًا بواسطة خطوط منشأة من إحدى زواياه.

35- إذا علمت قاعدة المثلث من حيث المقدار والموضع ومجموع الأضلاع، فأثبت أن العمودي من أي من نهايتي القاعدة على الضلع المجاور والمنصف الخارجي للزاوية الرأسية يلتقيان، في نقطة، على خط عمودي على القاعدة.

36- إن منصفات زوايا الشكل الرباعي المحدب تُشكل رباعي الأضلاع فيه كل زاويتان متقابلتان مكملتان لبعضهما البعض. إذا كان الشكل الرباعي الأول متوازي أضلاع، فإن الثاني مستطيل؛ إذا كان الأول مستطيلاً، فإن الثاني مربع.

37- افترض أن نقاط المنتصف للأضلاع و و للمثلث هي على التوالي و و وأن وتتقاطع مع . اثبت أن أضلاع المثلث تساوي على التوالي متوسطات المثلث الثلاثة.

38- أوجد مسار كرة البلياردو بدايةً من نقطة معينة وبعد أن تنعكس من الأضلاع الأربعة للطاولة ومرورها عبر نقطة أخرى معينة. (افترض أن الكرة لا تدخل أي جيب).

39- إذا تساوت القطعتان اللذان ينصفان زاويتين من المثلث وينتهيان عند الضلعين المقابلين، فأثبت أن المثلث متساوي الساقين.

40. إذا أُدرج مربع في مثلث، فإن المستطيل المحصور بضلعه ومجموع القاعدة والارتفاع يساوي ضعف مساحة المثلث.

41- إذا كانت و هما الساقان في مثلث متساوي الساقين وإذا كانت ، فأثبت أن .

42- إذا علمت قاعدة المثلث، والفرق بين زاويتي القاعدة، والمجموع أو الفرق بين الأضلاع، فأنشئ المثلث.

43- إذا علمت قاعدة المثلث، والمتوسط الذي ينصف القاعدة، والمساحة، فأنشئ المثلث.

44- إذا تقاطعا القطرين و للشكل الرباعي عند ونُصفا عند النقطتين و ، فإن

45- إذا أُنْشِئَت مربعات على أضلاع أي مثلث، فإن خطوط الواصلة بين الزوايا المتجاورة تكون على التوالي:

(أ) أضعاف متوسطات المثلث؛

(ب) عمودية عليها.